TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 15-01-2016

Problema 1. Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \frac{40\, s}{(s+1)(s^2+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la funzione di trasferimento ingresso–uscita e la risposta al gradino unitario.

Problema 3. Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = (0.2)^t - (0.5)^t$$

1. Calcolare la funzione di trasferimento ingresso–uscita;
2. calcolare, se esiste (giustificare la risposta), la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 6\,\sin(\pi t + \pi/4)$.

Problema 4. Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^3$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = 1$, $y(1) = 3$, $y(2) = 9$.

Problema 5. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\Big(x_1(t) - 1\Big)^3 + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\Big(x_1(t) - 1\Big)^3 + k\Big(x_1(t) + x_2^2(t) - 1\Big) - x_2(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (1, 0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov con $V(x) = (x_1 - x_{e,1})^4 + \beta(x_2 - x_{e,2})^2$, scegliendo opportunamente β.
(Suggerimento: si ricordi che per studiare il segno delle radici di un polinomio non è necessario calcolarle in modo esplicito).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
