SCRITTO DI TEORIA DEI SISTEMI DEL 14/06/2016

SOLUZIONI A CURA DI Vittorio De Iuliis

PROBLEMA 1

Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \frac{14 \cdot s}{(s-1)(s-6)}.$$

1) Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$.
2) Si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso.
3) Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

SOLUZIONE

$$W(s) = K \frac{14 \cdot s}{(s-1)(s-6)} = K \frac{14 \cdot s}{(-1)(1-s)\cdot(-6)\left(1-\frac{s}{6}\right)} = K \frac{\cancel{14}^{\,7}}{\cancel{6}_{\,3}} \frac{s}{(1-s)\left(1-\frac{s}{6}\right)}$$

per $K=1$ si ha $\tilde{W}(s) = \frac{7}{3} \frac{s}{(1-s)\left(1-\frac{s}{6}\right)}$

nella quale si riconoscono i termini (e le approssimazioni asintotiche):

- GUADAGNO DI BODE : $K_{\tilde{W}} = \frac{7}{3} \Rightarrow K_{W_{dB}} = 20 \log_{10} \left|\frac{7}{3}\right| \cong 7.36 \text{ dB}$

$\angle K_{\tilde{W}} = 0$ (numero reale positivo)

- TERMINE MONOMIO al numeratore $s \to j\omega$ contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di $+20\,dB/dec$ da $\omega = 0$ in poi
contribuisce al diagramma delle fasi con uno spostamento globale di $\angle j\omega = \frac{\pi}{2}$ rad.

- TERMINE BINOMIO $(1 - s)$ al denominatore $\rightarrow \tau_1 = 1\ s,\ \omega_{\tau_1} = \frac{1}{\tau_1} = 1\ rad/s$

contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di $-20\ dB/dec$ in $[1, +\infty)$
contribuisce al diagramma delle fasi con una pendenza di $\overset{+}{-}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\frac{rad}{dec}$ in $[0.1, 10]$

è al denominatore e ma ha segno negativo!

- TERMINE BINOMIO $\left(1 - \frac{s}{6}\right)$ al denominatore $\rightarrow \tau_2 = \frac{1}{6};\ \omega_{\tau_2} = 6\ rad/s$

contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di $-20\ dB/dec$ in $[6, +\infty)$
contribuisce al diagramma delle fasi con una pendenza di $-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\frac{rad}{dec}$ in $[0.6, 60]$.

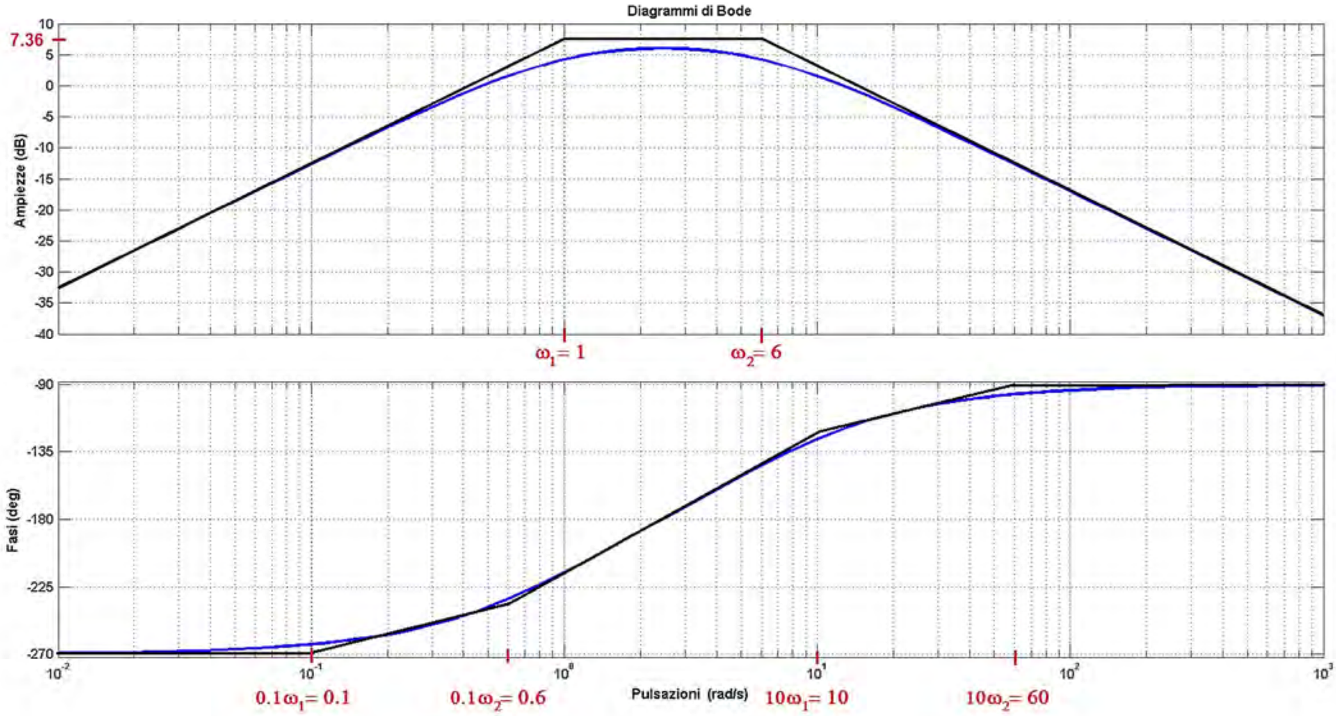
RIASSUMENDO si hanno i seguenti diagrammi asintotici

- DIAGRAMMA DEI MODULI

INTERVALLO	PENDENZA	COMMENTO
$(0 <)\ \omega < 1\ \frac{rad}{s}$	$+20\ dB/dec$	Contribuisce il solo termine monomio (prima di ω_{τ_1})
$\underset{\omega_{\tau_1}}{1}\ \frac{rad}{s} < \omega < \underset{\omega_{\tau_2}}{6}\ \frac{rad}{s}$	$0\ dB/dec$	termine monomio + 1° termine binomio al denominatore
$6\ \frac{rad}{s} < \omega\ (< +\infty)$	$-20\ dB/dec$	tutti i termini

- DIAGRAMMA DELLE FASI

INTERVALLO	PENDENZA	COMMENTO
$(0 <)\ \omega < 0.1\ \frac{rad}{s}$ $\left(\frac{1}{10}\omega_{\tau_1}\right)$	$0\ rad/dec$	Nessun contributo
$0.1 \leq \omega < 0.6\ \frac{rad}{s}$	$+\frac{\pi}{4}\ rad/dec$	Contributo del solo 1° termine binomio al denominatore
$0.6 < \omega < 10\ \frac{rad}{s}$	$+\frac{\pi}{2}\ rad/dec$	Contributo di entrambi i termini binomi al denominatore
$10 < \omega < 60\ \frac{rad}{s}$	$+\frac{\pi}{4}\ rad/dec$	Contributo del solo 2° termine binomio al denominatore
$60\ \frac{rad}{s} < \omega$	$0\ rad/dec$	Nessun contributo residuo


Diagrammi di Bode
7.36
Ampiezze (dB)
Fasi (deg)
Pulsazioni (rad/s)
ω1= 1
ω2= 6
0.1ω1= 0.1
0.1ω2= 0.6
10ω1= 10
10ω2= 60

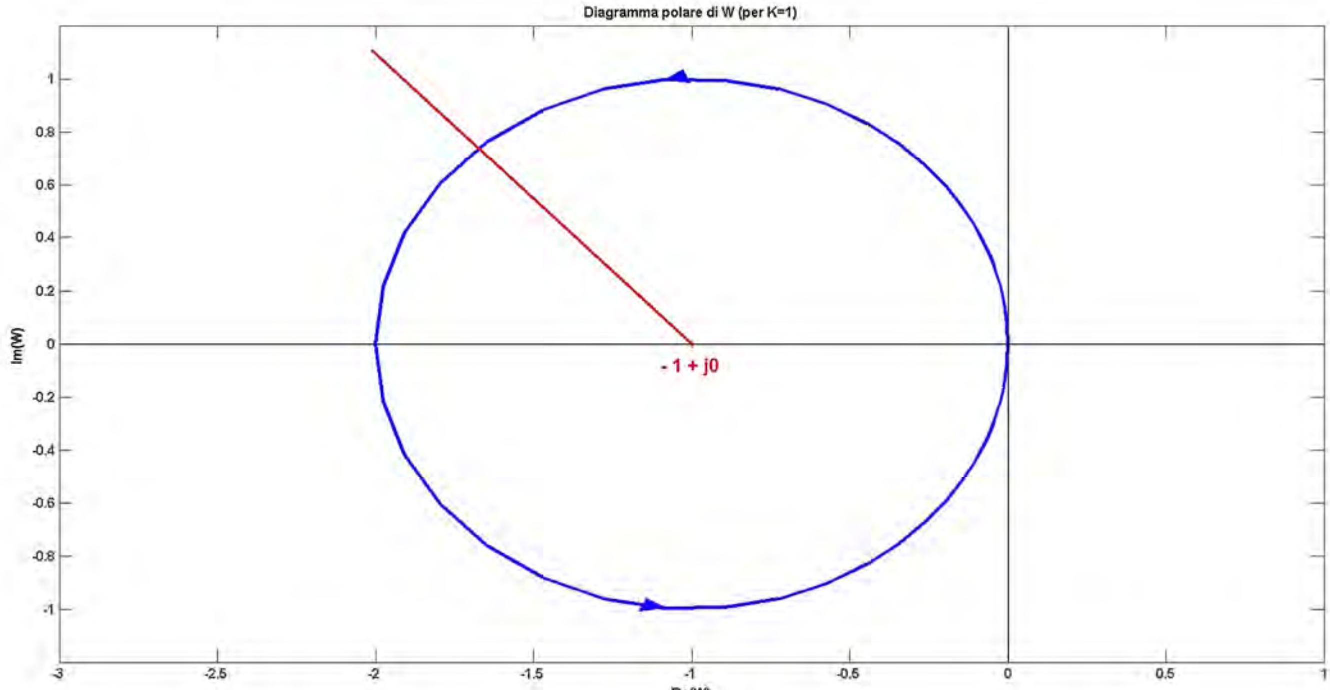


Diagramma polare di W (per K=1)
Im(W)
Re(W)
- 1 + j0

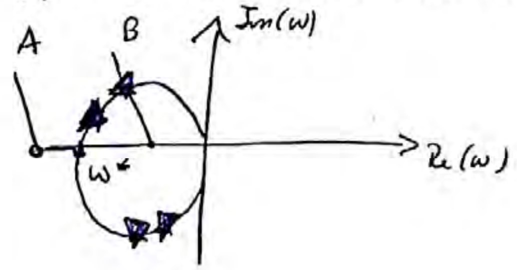
Denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso:

$$W_{CH}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{K\tilde{W}(s)}{1+K\tilde{W}(s)} = \frac{\frac{14ks}{(s-1)(s-6)}}{1+\frac{14ks}{(s-1)(s-6)}} = \frac{14\cdot k\cdot s}{(s-1)(s-6)+14\cdot k\cdot s}$$

$$d_{CH}(s) = (s-1)(s-6)+14\cdot k\cdot s = s^2-7s+6+14\cdot k\cdot 6 = s^2+(14k-7)s+14$$

Applichiamo ora il criterio di Nyquist al sistema controreazionato al variare di K.

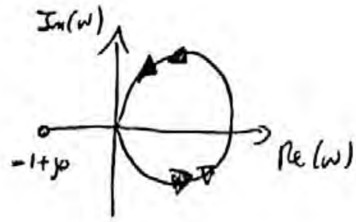
Diagramma di Nyquist per $K>0$



Per $K>0$ sono possibili due casi: $\boxed{A}$ il punto $-1+j0$ è esterno al diagramma $\Rightarrow \overset{\frown}{N}=0$

$\boxed{B}$ il punto $-1+j0$ è interno al diagramma $\Rightarrow \overset{\frown}{N}=2$

Per $K<0$



un solo caso possibile $\forall K<0$
$-1+j0$ esterno al diagramma $\Rightarrow \overset{\frown}{N}=0$

Si noti che il numero di poli a parte reale POSITIVA della funzione di trasferimento a catena diretta (ciclo aperto) è 2 $\begin{pmatrix} s-1 \Rightarrow p_1=1 \\ s-6 \Rightarrow p_2=6 \end{pmatrix} \Rightarrow P_{AD}=2$.

Occorre determinare ~~i~~ valori di $K>0$ per i quali sono validi i casi A e B. Per fare ciò, troviamo la pulsazione di attraversamento ω^* dell'asse reale, e calcoliamo $|\tilde{W}(j\omega^*)|$.

ω^* è t.c. $\angle \tilde{W}(j\omega^*) = 0 \iff \mathrm{Im}\left(\tilde{W}(j\omega)\right) = 0$

$$\mathrm{Im}\left\{\tilde{W}(j\omega)\right\} = 0 \iff \mathrm{Im}\left\{\frac{\cancel{14}\ j\omega}{(j\omega-1)(j\omega-6)}\right\} = 0 \iff \mathrm{Im}\left\{\frac{j\omega}{-\omega^2-7j\omega+6}\right\} = 0$$

$$\iff \mathrm{Im}\left\{\frac{j\omega\left(-\omega^2+6+7j\omega\right)}{\left(-\omega^2-7j\omega+6\right)\left(-\omega^2+6+7j\omega\right)}\right\} = 0 \iff \mathrm{Im}\left\{j\omega\left(-\omega^2+6+7j\omega\right)\right\} = 0$$

$$\iff \mathrm{Im}\left\{-j\omega^3+6j\omega-7\omega^2\right\} = 0 \iff -\omega^3+6\omega = 0 \iff$$

$$\iff \omega\left(\omega^2-6\right) = 0 \quad \begin{cases} \omega = 0 \text{ (banale)} \\ \omega^* = \pm\sqrt{6} \simeq \pm 2.45 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Calcolo $|\tilde{W}(j\omega^*)|$:

$$|W(j\omega^*)| = \left|\frac{14\,j\sqrt{6}}{(j\sqrt{6}-1)(j\sqrt{6}-6)}\right| = \frac{14\sqrt{6}}{\sqrt{1+6}\ \sqrt{36+6}} = \frac{14\sqrt{6}}{\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{7}\sqrt{6}\right)} = \frac{14}{7} = 2$$

Dunque per $K=1$ il diagramma di Nyquist taglia l'asse reale in $-2+j0$, essendo $|W(j\omega^*)| = 2$.

Si è nel caso $\boxed{A}$ (diagramma interno al punto $-1+j0$) se $K\left|W(j\omega^*)\right| < 1$ $(K>0)$ ovvero se $K < \frac{1}{2}$ $\quad (\tilde{N}=0)$

Si è in $\boxed{B}$ (diagramma esterno al punto $-1+j0$) se $K\left|W(j\omega^*)\right| > 1$ ovvero per $K > \frac{1}{2}$ $(\tilde{N}=2)$

RIASSUMENDO:
$$\begin{cases} K < 0 & P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N} = 2 - 0 = 2 & \text{INSTABILITÀ a ciclo chiuso} \\ K \in \left(0, \frac{1}{2}\right) & P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N} = 2 - 0 = 2 & \text{INSTABILITÀ a ciclo chiuso} \\ K > \frac{1}{2} & P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N} = 2 - 2 = 0 & \text{STABILITÀ a ciclo chiuso} \end{cases}$$

L'analisi con Routh è banale! $d_{CH}(s) = s^2 + (14K-7)s + 14$ $\rightarrow$ Regola di CARTESIO
$d_{CH}(s)$ ha radici reali NEGATIVE (stabilità a ciclo chiuso) se tutti i coefficienti hanno lo stesso segno; ciò è vero se $14K - 7 > 0 \iff K > \frac{7}{14} \iff K > \frac{1}{2}$: stesso risultato di sopra.

PROBLEMA 2

Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

dove $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C = [2 \ \ -1]$

1. Se A è diagonalizzabile (giustificare la risposta), completare la decomposizione spettrale e calcolare e^{At}.
2. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema
3. Calcolare la funzione di trasferimento $W(s)$ e discutere la perdita di informazione dovuta al passaggio dalla rappresentazione con lo spazio di stato alla rappresentazione ingresso-uscita (suggerimento: vi sono cancellazioni di zeri e poli in $W(s)$? cosa comporta ciò sulla conoscenza delle proprietà del sistema?)

SVOLGIMENTO

A è in forma triangolare, dunque gli autovalori di A sono sulla diagonale

$\lambda_1(A) = -1$, $\lambda_2(A) = 1$. Essi sono distinti $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile.

Calcolo gli autovettori destri r_1, r_2 e sinistri l_1^T, l_2^T di A in modo che

$A = R\Lambda L$ con $R = [r_1 \vdots r_2]$, $L = \begin{bmatrix} l_1^T \\ l_2^T \end{bmatrix}$, $l_i^T \cdot r_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

r_1 è t.c. $(\lambda_1 I - A) r_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff r_{1y} = 0, r_{1x} = \alpha \in \mathbb{R}$

in particolare scelgo $\alpha = 1 \Rightarrow r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

r_2 è t.c. $(\lambda_2 I - A) r_2 = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{2x} \\ r_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff r_{2x} = r_{2y}$ (con $r_{2x} = r_{2y} = \alpha \in \mathbb{R}$)

anche in questo caso è semplice scegliere $\alpha = 1 \Rightarrow r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$R = [r_1 \vdots r_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L = R^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T}{1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^T \\ l_2^T \end{bmatrix}$$

E per $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è facile verificare che $R\Lambda L = A$.

e^{At} si ottiene mediante la formula $e^{At} = R e^{\Lambda t} L = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t} \pi_i l_i^T$

$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t}+e^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}$

Veniamo al punto 2. I modi naturali del sistema corrispondono agli autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Si ha: $\begin{cases} Re(\lambda_1) < 0 \Rightarrow \text{modo naturale asintoticamente STABILE} \\ Re(\lambda_2) > 0 \Rightarrow \text{modo naturale INSTABILE} \end{cases}$

Osservabilità ed eccitabilità dei modi:

$l_1^T B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ modo eccitabile per ingressi impulsivi

$l_2^T B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$ modo NON eccitabile per ingressi impulsivi

$C \cdot \pi_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ modo osservabile in uscita

$C \cdot \pi_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ modo osservabile in uscita.

Calcolo della risposta impulsiva $w(t) = C e^{At} B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t}+e^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow w(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & -2e^{-t}+2e^{t}-e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-t}$

Punto n° 3: Si può calcolare $W(s)$ semplicemente come $\mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{1}{s+1}$

oppure mediante $W(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 2(s-1) & 4-(s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}{(s+1)(s-1)}$$

$$\Rightarrow W(s) = \frac{\cancel{s-1}}{(s+1)\cancel{(s-1)}} = \frac{1}{s+1}$$

otteniamo dunque una cancellazione zero-polo nel passaggio dalla rappresentazione con lo spazio di stato alla rappresentazione ingresso-uscita (in frequenza). In particolare, la cancellazione riguarda un modo INSTABILE (il polo/autovalore $p = 1$), non eccitabile in ingresso (e dunque non stabilizzabile con azioni di controllo).

PROBLEMA 3

Sia dato il seguente sistema a tempo discreto, dove $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$ sono scalari:

$$\begin{cases} x(t+1) = 0.5\,x(t) - u(t) \\ y(t) = -2x(t) \end{cases} \qquad (*)$$

1. Calcolare la risposta forzata al gradino unitario

2. Calcolare la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \frac{1}{4}\sin(2\pi t)$

SVOLGIMENTO

Nel sistema (*) si individuano facilmente $A = 0.5$, $B = -1$, $C = -2$.

Per il calcolo della risposta forzata è conveniente porsi nel dominio delle frequenze, dove $Y_{for}(z) = W(z)\cdot U(z)$ con $U(z) = \mathcal{Z}\{\delta_{-1}(t)\} = \frac{z}{z-1}$

Occorre calcolare $W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\} = \mathcal{Z}\{CA^{t-1}B\}$, $t>0$

oppure direttamente $W(z) = C(zI-A)^{-1}B$

Si ha: $W(z) = C(zI-A)^{-1}B = -2(z-\frac{1}{2})^{-1}(-1) = \dfrac{2}{z-1/2}$

$Y_{for}(z) = W(z)U(z) = \dfrac{2z}{(z-1)(z-0.5)}$

Calcolo $y_{for}(t) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{for}(z)\}$ passando per lo sviluppo in fratti semplici di $\dfrac{Y_{for}(z)}{z}$

$$\frac{Y_{for}(z)}{z} = \frac{R_1}{(z-1)} + \frac{R_2}{(z-0.5)} \quad \text{con} \quad R_1 = \lim_{z\to1}(z-1)\frac{Y_{for}(z)}{z} = \lim_{z\to1}\frac{2}{(z-0.5)} = 4$$

$$R_2 = \lim_{z\to0.5}(z-0.5)\frac{Y_{for}(z)}{z} = \lim_{z\to0.5}\frac{2}{(z-1)} = -4$$

$\Rightarrow Y_{for}(z) = \dfrac{4z}{(z-1)} - \dfrac{4z}{(z-0.5)} \Rightarrow y_{for}(t) = 4\delta_{-1}(t) - 4(0.5)^t$

2.

Calcolo della risposta armonica (che esiste essendo stabile la parte ragg. e oss. del sistema)

$y_{arm}(t) = M|W(e^{j\omega})|\sin(\omega t + \varphi + \angle W(e^{j\omega}))$ con $u(t) = \frac{1}{4}\sin(2\pi t) \Rightarrow \begin{cases} M = 1/4 \\ \varphi = 0 \\ \omega = 2\pi \text{ rad/s} \end{cases}$

$|W(e^{j\omega})| = |W(e^{j2\pi})| = \left|\dfrac{2}{e^{j2\pi}-1/2}\right| = \dfrac{2}{|+1-1/2|} = 4$

$$\angle W(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi} = \angle \frac{2}{(e^{j2\pi}-1/2)} = \angle 2 - \angle 1-1/2 = 0-0=0$$

$$\Rightarrow y_{ssm}(t) = M\,|W(e^{j2\pi})|\sin\left(2\pi t+\varphi+\angle W(e^{j2\pi})\right) = \cancel{4}\cdot\cancel{\tfrac{1}{4}}\sin(2\pi t)$$

PROBLEMA 4

Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned} \qquad A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$ della decomposizione di Kalman
3. Si forniscano esempi di stati raggiungibili e non raggiungibili, osservabili e non osservabili.

SVOLGIMENTO

Calcolo delle matrici di raggiungibilità $R=[B \mid AB \mid A^2B]$ e osservabilità $Q=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}$

$R=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ che ha rango pieno $\Rightarrow$ lo spazio di stato è interamente raggiungibile.

$Q=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\4&3&4\end{bmatrix}$ che ha rango 2 $\Rightarrow$ lo spazio di stato non è interamente osservabile

Si ha $\mathcal{R}=\mathrm{Im}(R)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$\mathcal{I}=\mathcal{N}(Q)=\{v \text{ t.c. } Q\cdot v=0\}$ $\quad Q\cdot v=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&2\\4&3&4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-z\\2x+y+2z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-z\\y=0\end{cases} \Rightarrow v=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\-\alpha\end{pmatrix}\overset{\alpha=1}{=}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{I}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

Quattro sottospazi della decomposizione strutturale di Kalman:

$\mathcal{X}_1$ è t.c. $\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I}$ (ragg. e inoss.)

$\mathcal{X}_2$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R}$ (ragg. e oss.)

$\mathcal{X}_3$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I}$ (non ragg e non oss)

$\mathcal{X}_4$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$ (non ragg. e oss.)

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I}$

$\mathcal{X}_2$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{X}_3$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} = \{0\}$

$\mathcal{X}_4$ è t.c. $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^3 = \{0\}$ ($\mathbb{R}^3$ è generato già da $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$)

Decomposizione completa di Kalman: la matrice del cambio di coordinate t.c. $z(t) = Tx(t)$ è

$$T^{-1} = \left[\text{base}(\mathcal{X}_1) \,\vdots\, \text{base}(\mathcal{X}_2) \,\vdots\, \text{base}(\mathcal{X}_3) \,\vdots\, \text{base}(\mathcal{X}_4) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nelle nuove coordinate si ha $\begin{cases} \dot z(t) = T\dot x(t) = TAx(t) + TBu(t) = \underbrace{TAT^{-1}}_{\tilde A} z(t) + \underbrace{TB}_{\tilde B} u(t) \\ y(t) = Cx(t) = \underbrace{CT^{-1}}_{\tilde C} z(t) \end{cases}$

ovvero $\boxed{\tilde A = TAT^{-1}, \ \tilde B = TB, \ \tilde C = CT^{-1}}$

Si verifica facilmente che $T = (T^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

da cui: $\tilde A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($\tilde A_{11}$, $\tilde A_{22}$)

$\tilde B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($\tilde B_1$, $\tilde B_2$) $\qquad \tilde C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{1 \ \ 0} \end{bmatrix}$ ($\tilde C_1$, $\tilde C_2$)

Osservando $\tilde A$ si vede subito che dei tre autovalori del sistema $\{0, 2, 1\}$ l'autovalore $\lambda_1 = 0$ è NON OSSERVABILE (ma raggiungibile), e $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$ sono sia osservabili che raggiungibili.

<u>PROBLEMA 5</u>

Sia dato il sistema $\begin{cases} \dot x_1 = (x_1 - 2)x_2 + K(x_1 - 2) \\ \dot x_2 = -3x_2 - (x_1 - 2)^2 \end{cases}$

Dopo aver verificato che $x_e = (2, 0)$ sia un punto d'equilibrio del sistema, si studi la stabilità di x_e al variare del parametro $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

<u>SVOLGIMENTO</u> x_e è d'equilibrio in quanto verifica $\begin{cases} 0 = f_1(x_e) \\ 0 = f_2(x_e) \end{cases}$.

A tale scopo calcoliamo lo Jacobiano del sistema in x_e.

$$J(x)\Big|_{x_e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} x_2 + K & x_1 - 2 \\ -2(x_1-2) & -3 \end{bmatrix}\Bigg|_{(2,0)} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Poiché $J(x_e)$ è diagonale, gli autovalori sono sulla diagonale.

In particolare $\lambda_1 = K$, $\lambda_2 = -3$.

Per quanto affermato dal metodo indiretto di Lyapunov, al variare di K sono possibili i seguenti casi:

- se $K < 0$ allora $J(x_e)$ ha tutti autovalori a parte reale negativa $\Rightarrow$ x_e LOC. ASINT. STABILE
- se $K > 0$ allora esiste un autovalore di $J(x_e)$ a parte reale positiva $\Rightarrow$ x_e INSTABILE
- se $K = 0$ $J(x_e)$ ha un autovalore a parte reale nulla $\Rightarrow$ CASO CRITICO, nulla si può concludere su x_e.

Discutiamo il caso critico con il metodo DIRETTO di Lyapunov

Per $K=0$ il sistema diviene: $\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1-2)x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - (x_1-2)^2 \end{cases}$

Scelgo la candidata di Lyapunov $V(x) = \frac{\alpha}{2}(x_1-2)^2 + \frac{x_2^2}{2} > 0$ per $\alpha > 0$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_1-2) & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1-2)x_2 \\ -3x_2 - (x_1-2)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha(x_1-2)^2 x_2 - 3x_2^2 - (x_1-2)^2 x_2$$

È chiaro che per $\alpha = 1$ (ammissibile per ottenere $V(x) > 0$) si ha:

$\dot{V}(x) = -3x_2^2 < 0$ (semidefinita negativa, si annulla in tutti i punti $\tilde{x} = (\gamma, 0)$, $\gamma \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ per $K = 0$ x_e è SEMPLICEMENTE STABILE

RIASSUMENDO:
- se $K < 0$ x_e LOC. ASINTOTICAMENTE STABILE
- se $K = 0$ x_e SEMPLICEMENTE STABILE
- se $K > 0$ x_e INSTABILE.