TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 10-01-2017

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{2\,(s+5)}{s\,(s-1)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Svolgere la decomposizione spettrale di A e discutere la stabilità dei modi naturali del sistema;
2. si discutano le proprietà di osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
3. calcolare la funzione di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
4. calcolare la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento del sistema e discutere la perdita di informazione dovuta al passaggio dalla rappresentazione con lo spazio di stato alla rappresentazione ingresso-uscita. (*Suggerimento: si ricordi quanto discusso al punto 2*);
5. calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = e^t \sin(t)$;

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t - \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema;
2. si calcoli la risposta al gradino unitario;
3. si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(\pi t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà strutturali degli stati $x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -k\,x_1^3(t) + (1-k)\,x_1(t) + 3\,x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -k\,x_1^2(t)x_2(t) - x_1(t)x_2(t). \end{cases}$$

Si verifichi che l'origine sia un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
