TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 14-02-2017

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{8\,(s-1)}{(s^2+4s+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (8 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\ .$$

Conoscendo l'autovalore $\lambda_1 = 1 + j3$ e l'autovettore destro ad esso associato $r_1 = \begin{bmatrix}j\\1\end{bmatrix}$:

1. si calcolino la matrice A del sistema e la matrice di transizione dello stato e^{At};
2. si discutano le proprietà di stabilità, osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
3. si calcolino la risposta impulsive $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema;
4. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = (0.4)^{t-1}, \quad w(0) = 0.$$

1. Calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = (0.2)^t$;
2. calcolare, se esiste (giustificare la risposta), la risposta armonica alla sequenza d'ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} 3 \text{ per } t \text{ pari} \\ -3 \text{ per } t \text{ dispari} \end{cases} \qquad \text{per } t \geq 0, \quad u(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

   opportunamente riscritta in forma armonica.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà degli stati $x_1 = \begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ e $x_2 = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\,x_1(t) - \big(x_2(t) - 2\big)^2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)\,\big(x_2(t) - 2\big) + \gamma\,\big(x_2(t) - 2\big). \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (0, 2)$ sia un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $\gamma \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
