TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. A. Germani

Compito d'esame del 18-07-2017

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{16\,(s+1)}{s^2+8s+16}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C \ = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. si calcolino la la funzione di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$, la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento del sistema;
3. si trovi lo stato iniziale $x(0)$ tale che l'evoluzione libera dell'uscita sia $y(t) = \cos(2t) + \sin(2t)$.

Problema 3. (6 punti) Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = (0.2)^t - (0.8)^t$$

1. Calcolare la funzione di trasferimento ingresso–uscita;
2. calcolare la risposta forzata al gradino unitario e, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 2\sin(\pi t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C \ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si forniscano un esempio di stato raggiungibile e osservabile e un esempio di stato non raggiungibile e non osservabile.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \big(k - x_1^2(t) - x_2^2(t)\big)x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \big(k - x_1^2(t) - x_2^2(t)\big)x_2(t) - x_1(t). \end{cases}$$

Dopo aver verificato che l'origine è un punto d'equilibrio per il sistema, se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
