SCRITTO D'ESAME DI Teoria dei Sistemi del 1° FEBBRAIO 2018

Problema 1

$$W(s) = K \frac{4(s+10)}{s(s^2+4s+4)}$$

Per $K=1$ ho $\tilde{W}(s) = \frac{4(s+10)}{s(s^2+4s+4)}$ di cui traccio i diagrammi di Bode

$$\tilde{W}(s) = \frac{40\left(1+\frac{s}{10}\right)}{4s\left(1+s+\frac{s^2}{4}\right)} = 10 \frac{\left(1+\frac{s}{10}\right)}{s\left(1+s+\frac{s^2}{4}\right)}$$

Termine "guadagno": $K_{\tilde{W}} = 10$

$\Rightarrow (K_{\tilde{W}})_{dB} = 20 \log_{10} 10 = 20dB$ (traslazione globale del diagramma dei moduli)

$K_{\tilde{W}} > 0 \Rightarrow$ nessuno sfasamento dovuto al guadagno

Termine binomio al numeratore: $(s+10) = 10\left(1+\frac{s}{10}\right) \Rightarrow \omega_t = 10$ rad/s

MODULI: pendenza di $+20$dB/dec in $[10, +\infty)$

FASI: pendenza di $+\pi/4$ rad/dec in $[1, 100]$

Termine monomio al denominatore: $s = j\omega$

MODULI: pendenza di -20dB/dec in $[0, +\infty)$

FASI: sfasamento globale di $-\pi/2$

Termine trinomio al denominatore: $s^2+4s+4 = 4\left(1+\frac{4s}{4}+\frac{s^2}{4}\right)$ $\rightarrow \omega_n = 2$ rad/s, $\zeta = 1$

MODULI: pendenza di -40 dB/dec in $[2, +\infty)$

FASI: pendenza di $-\pi/2$ rad/dec in $[0.2, 20]$

NOTA: lo smorzamento $\zeta = 1$ garantisce che il termine trinomio equivale a un binomio doppio: dunque nel diagramma delle fasi l'approssimazione su due decadi è ottima.

MODULI

$\omega < 2$ rad/s	-20 dB/dec
$2 < \omega < 10$ rad/s	-60 dB/dec
$10 < \omega$	-40 dB/dec

FASI

$\omega < 0.2$ rad/s	0 rad/dec
$0.2 < \omega < 1$ rad/s	$-\pi/2$ rad/dec
$1 < \omega < 20$ rad/s	$-\pi/4$ rad/dec
$20 < \omega < 100$ rad/s	$+\pi/4$ rad/dec
$100 < \omega$	0 rad/dec

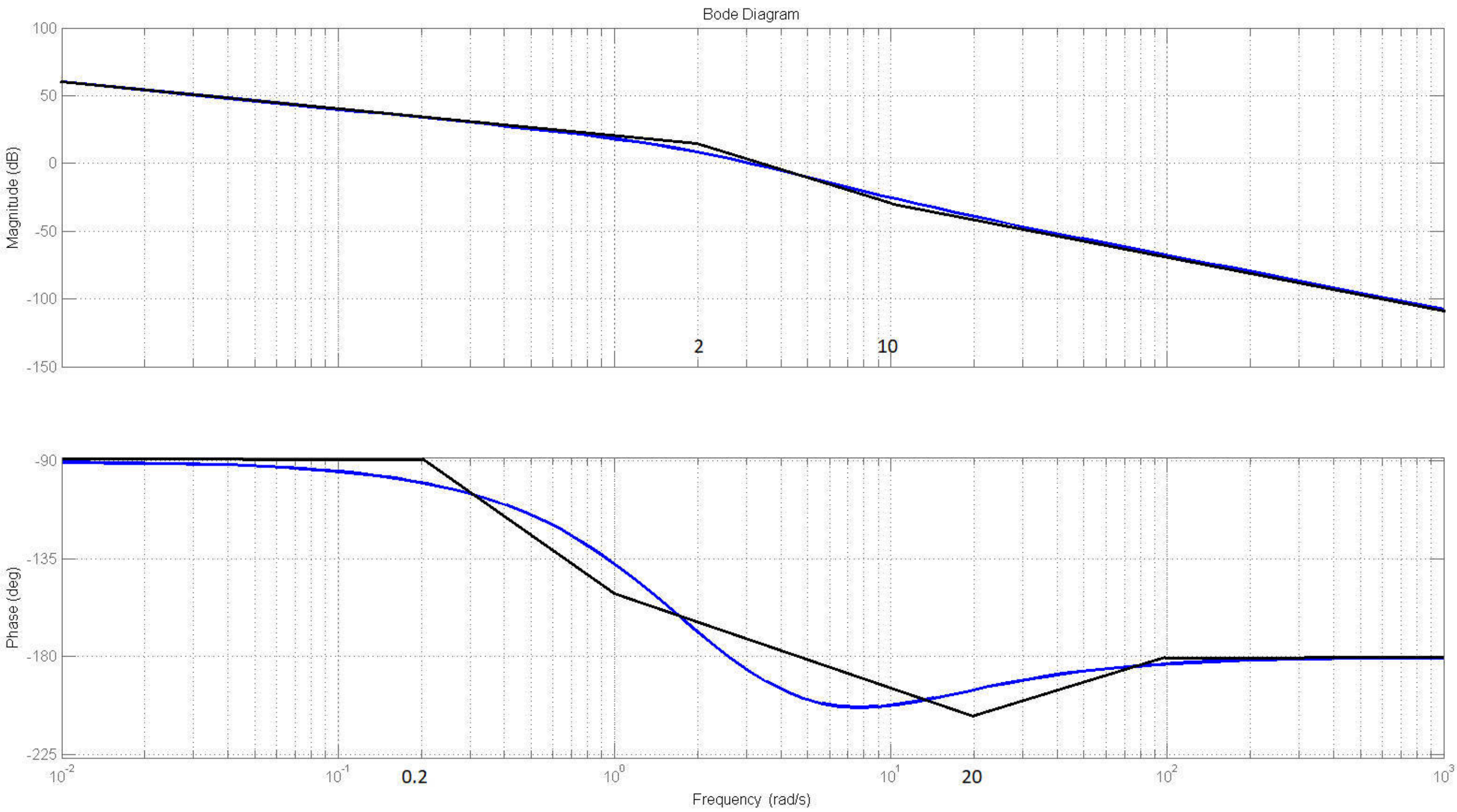
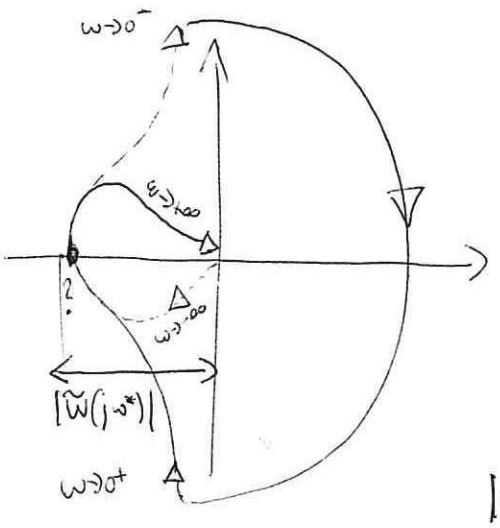


Diagramma polare per $k=1$ (di $W(s)$)



Pulsazione di attraversamento: ω^* : $\mathrm{Im}\{\tilde{W}(j\omega)\} = 0$

$$\mathrm{Im}\{\tilde{W}(j\omega)\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{(j\omega+10)}{j\omega(-\omega^2+4j\omega+4)}\right\} = 0 \iff \mathrm{Im}\left\{\frac{(j\omega+10)}{-j\omega^3-4\omega^2+4j\omega}\right\} = 0$$

$$\iff \mathrm{Im}\left\{\frac{(j\omega+10)(-4\omega^2-j(4\omega-\omega^3))}{(-4\omega^2+j(4\omega-\omega^3))(-4\omega^2-j(4\omega-\omega^3))}\right\} = 0$$

$$\iff \mathrm{Im}\{(j\omega+10)(-4\omega^2-j(4\omega-\omega^3))\} = 0$$

$$\iff -4\omega^3+10\omega^3-40\omega = 6\omega^3-40\omega = 2\omega(3\omega^2-20) = 0$$

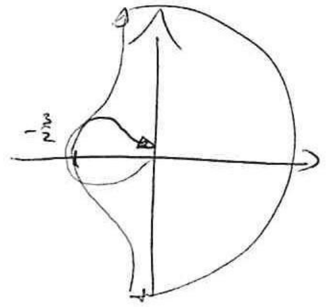
$\omega = 0$

$\omega = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$

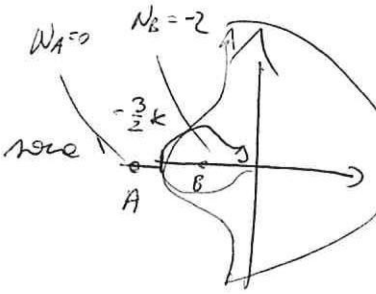
$$|W(j\omega^*)| = \left|W\left(j\sqrt{\tfrac{20}{3}}\right)\right| = \left|\frac{4\left(j\sqrt{\frac{20}{3}}+10\right)}{j\sqrt{\frac{20}{3}}\left(-\frac{20}{3}+4j\sqrt{\frac{20}{3}}+4\right)}\right| = \frac{4\sqrt{\frac{20}{3}+100}}{\sqrt{\frac{20}{3}}\sqrt{\left(-\frac{20}{3}+4\right)^2+16\,\frac{20}{3}}} = \frac{3}{2}$$

Dunque, poiché $|\tilde{W}(j\omega^*)| = \frac{3}{2}$, si ha che il diagramma polare di $W(s)$ per $k=1$ (3

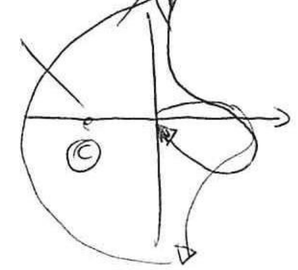
attraversa l'asse reale in $-\frac{3}{2}$:



Dunque, al variare di $k>0$, il diagramma di $W(s)$ sarà



e per $k<0$ sarà



Per quanto riguarda il criterio di Nyquist per la stabilità di $W_{CH}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}$ si ha che per $k>0$ sono possibili (per il punto critico $-1+j0$) le posizioni

(A) quando $-\frac{3}{2}k > -1$, ovvero quando $k < \frac{2}{3}$ (e $k>0$).
in tal caso $P_{CH} = P_{AP} - \hat{N}_A = 0 - 0 = 0$: $W_{CH}(s)$ è stabile!

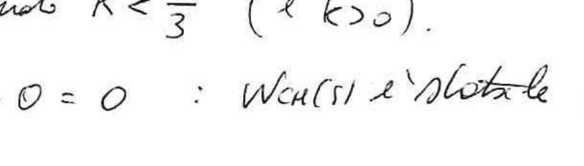
(B) quando $-\frac{3}{2}k < -1$, ovvero quando $k > \frac{2}{3}$
e in tal caso $P_{CH} = P_{AP} - N_B = 0 - (-2) = 2$: $W_{CH}(s)$ è instabile!

Per $k<0$ si ha sempre il caso (C), in cui $P_{CH} = P_{AP} - \hat{N}_C = 0 - (-1) = 1$
↳ $\forall k<0$ $W_{CH}(s)$ è INSTABILE

CRITERIO DI ROUTH: denominatore di $W_{CH}(s)$: $D_{CH}(s) = \tilde{D}(s) + k\tilde{N}(s)$

$\Rightarrow D_{CH}(s) = s(s^2+4s+4) + k4(s+10) = s^3+4s^2+4s+4ks+40k = s^3+4s^2+4(k+1)s+40k$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 4(k+1) \\ 2 & 4 & 40k \\ 1 & * & \\ 0 & & \end{array} = \begin{array}{cc} 1 & 4(k+1) \\ 4 & 40k \\ -6k+4 & \\ 40k & \end{array}$$



$* = \frac{40k - 16(k+1)}{-4} = -10k + 4(k+1) = -6k+4$

se $k \in (0, \frac{2}{3})$ $W_{CH}(s)$ è STABILE ($D_{CH}(s)$ ha solo radici $Re(s)<0$)
altrimenti è instabile! CONFERMATO NYQUIST

PROBLEMA 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modi naturali:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \left\| \begin{matrix} \lambda - 3 & 4 \\ -2 & \lambda + 3 \end{matrix} \right\| = (\lambda-3)(\lambda+3) + 8 = 0 \iff \lambda^2 - 9 + 8 = 0$$

$$\iff \lambda^2 = 1 \implies \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Il modo naturale associato a $\lambda_1 = 1$ è INSTABILE $(Re(\lambda_1) = 1 > 0)$

il modo associato a $\lambda_2 = -1$ è ASINT. STABILE $(Re(\lambda_2) = -1 < 0)$.

Autovettori:

u_1: $(\lambda_1 I - A)u_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \cancel{2x = 4y}\ x = 2y$ e per $y = 1$ $u_1 = \begin{bmatrix} 2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

u_2: $(\lambda_2 I - A)u_2 = 0 \iff \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = y$ e per $y = 1$ $u_2 = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\implies U = [u_1 \mid u_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies V = U^{-1} = \frac{1}{2-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to v_1^T \\ \to v_2^T \end{matrix}$$

Eccitabilità e osservabilità:

$v_1^T B = [1 \ -1]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = +1 \neq 0$, $\quad v_2^T B = [-1 \ 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$ — entrambi i modi sono eccitabili per ingresso impulsivo

$C \cdot u_1 = [0 \ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$, $\quad C \cdot u_2 = [0 \ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$ — entrambi i modi sono osservabili in uscita

Calcolo di $\Phi(t) = e^{At}$

$$\Phi(t) = e^{At} = R\Lambda L = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t} u_i v_i^T = e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \ -1) + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(-1 \ 2) = e^{t}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{-t} & -2e^{t} + 2e^{-t} \\ e^{t} - e^{-t} & -e^{t} + 2e^{-t} \end{bmatrix} \qquad (\text{verificare che } e^{A0} = I)$$

Calcolo di $w(t) = Ce^{At}B$

$$w(t) = [0 \ 1]\begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{-t} & -2e^{t} + 2e^{-t} \\ e^{t} - e^{-t} & -e^{t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [e^{t} - e^{-t} \mid -e^{t} + 2e^{-t}]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies w(t) = e^{t} - e^{-t}$$

Funzione di trasferimento: $W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} = \frac{s+1-s+1}{(s-1)(s+1)} = \frac{2}{s^2-1}$

Risposta forzata all'ingresso $u(t) = 5\cos(2t)$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{5s}{s^2+4} \Rightarrow Y_{for}(s) = W(s)\,U(s) = \frac{2}{(s^2-1)}\cdot\frac{5s}{(s^2+4)} = \frac{10s}{(s^2-1)(s^2+4)}$$

$$\left(= \frac{10s}{(s-1)(s+1)(s-2j)(s+2j)} \right)$$

$$Y_{for}(s) = \frac{R_1}{s-1} + \frac{R_2}{s+1} + \frac{R_3}{s-2j} + \frac{R_4}{s+2j} \quad \text{con } R_4 = R_3^*$$

$$R_1 = \lim_{s\to 1} Y_{for}(s)\cdot(s-1) = \lim_{s\to 1}\frac{10s}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{10}{2(5)} = 1$$

$$R_2 = \lim_{s\to -1} Y_{for}(s)(s+1) = \lim_{s\to -1}\frac{10s}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{-10}{-2(5)} = 1$$

$$R_3 = \lim_{s\to 2j} Y_{for}(s)(s-2j) = \lim_{s\to 2j}\frac{10s}{(s^2-1)(s+2j)} = \frac{\overset{5}{\cancel{20j}}}{-5(\cancel{4j})} = \frac{5}{-5} = -1 \Rightarrow R_4 = R_3^* = -1.$$

Dunque $\displaystyle Y_{for}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2j} - \frac{1}{s+2j}$

$$y_{for}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{for}(s)\} = e^{t} + e^{-t} - e^{2jt} - e^{-2jt} = e^{t}+e^{-t} - 2\Big(\overbrace{\tfrac{1}{2}\left(e^{2jt}+e^{-2jt}\right)}^{\cos(2t)}\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{for}(t) = e^{t} + e^{-t} - 2\cos(2t).}$$

PROBLEMA 3

Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato da $w(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t \quad t = 0, 1, 2, \ldots$

Calcolare $y_{grad}(t)$ e la risposta armonica a $u(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

$$w(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t \Rightarrow W(z) = \mathcal{Z}\{w(t)\} = \frac{z}{z-\frac{2}{5}}$$

Risposta al gradino: $Y_{grad}(z) = W(z)\cdot U(z)$ con $U(z) = \frac{z}{z-1}$ $\quad \left(u(t) = \delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ 0 & t<0\end{cases}\right)$

$$Y_{grad}(z) = \frac{z^2}{(z-\frac{2}{5})(z-1)} \qquad \frac{Y_{grad}(z)}{z} = \frac{z}{(z-\frac{2}{5})(z-1)} = \frac{R_1}{z-\frac{2}{5}} + \frac{R_2}{z-1}$$

$$R_1 = \lim_{z\to\frac{2}{5}}\frac{z}{z-1} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{2}{3}$$

$$R_2 = \lim_{z\to 1}\frac{z}{z-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

NOTA: $R_1 + R_2 = D = w(0) = 1$ ✓

Dunque $\displaystyle Y_{grad}(z) = R_1\frac{z}{z-\frac{2}{5}} + R_2\frac{z}{z-1} = -\frac{2}{3}\left(\frac{z}{z-\frac{2}{5}}\right) + \frac{5}{3}\left(\frac{z}{z+1}\right) \Rightarrow \boxed{y_{grad}(t) = -\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^t + \frac{5}{3}\delta_{-1}(t).}$

Risposta armonica a $u(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ $\begin{cases} M = 1 \\ \varphi = 0 \\ \omega = \pi/4 \text{ rad/s}\end{cases}$

$$y_{arm}(t) = M\,|W(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{\pi}{4}}\cdot\cos\left(\omega t + \angle W(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{\pi}{4}} + \varphi\right) \quad \text{con } \varphi = 0,\ M = 1.$$

$$\left|W(e^{j\omega})\right|\Big|_{\omega=\pi/4} = \left|W\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\right| = \left|\frac{z}{z-\frac{2}{5}}\right|\Big|_{z=e^{j\frac{\pi}{4}}} = \left|\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{e^{j\frac{\pi}{4}}-\frac{2}{5}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$$

ricordando che $e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \left|W(e^{j\frac{\pi}{4}})\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}-4}{10}\right)^2+\frac{1}{2}}} \cong 1.3$$

$$\angle W(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi/4} = \angle \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{e^{j\pi/4}-\frac{2}{5}} = \angle e^{j\pi/4} - \angle \frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{5}$$

$$= \pi/4 - \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{5}}\right) \simeq -0{,}37$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{arm}(t) = 1.3\cos\left(\frac{\pi}{4}t-0.37\right)}$$

PROBLEMA 4

Sistema a tempo discreto: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Calcolo della matrice di raggiungibilità e del sottospazio da essa generato

$R = [B\ AB\ A^2B\ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha rango 3 $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ (sottospazio degli stati raggiungibili) ha dimensione 3

$$\mathcal{R} = \mathcal{I}m(R) = \operatorname{span}\left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$v_2 \leftarrow v_2 - v_3$, $v_3 \leftarrow -v_3$ $\qquad v_1 \leftarrow v_1 - v_2$

Matrice di osservabilità:

$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha rango 3 $\Rightarrow$ $\mathcal{N}(Q)$ ha dimensione 1

qualsiasi vettore del tipo $v = \begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\\0\end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ è t.c. $Q\cdot v = 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{I} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

4 sottospazi della decomposizione di Kalman:

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \mathcal{I}$ (raggiungibili e inosservabili)

$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{X}_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ (raggiungibili e osservabili)

$\mathcal{X}_3 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{X}_3 = \{0\}$ (non ragg. e non osservabili)

$\mathcal{X}_4 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4$ $\Rightarrow$ $\mathcal{X}_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ (non ragg. e osservabili, scelta più semplice).

Lo stato $x_a = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ è non raggiungibile e osservabile, lo stato $x_b = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ è raggiungibile e osservabile.

PROBLEMA 5

Dato il sistema:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1-k)x_1 + k x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - k^2 x_2 \end{cases}$$

si studi la stabilità di $x_e = (0,0)$ al variare di $k \in (-\infty, +\infty)$

Iniziamo con il metodo indiretto (o della linearizzazione):

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{bmatrix} 1-k & k x_2 \\ -2x_1 & -k^2 \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1-k & 0 \\ 0 & -k^2 \end{bmatrix}$$

la Jacobiana in x_e ha autovalori $\begin{cases} \lambda_1 = 1-k \\ \lambda_2 = -k^2 \end{cases}$

Chiaramente, se $\boxed{k<1}$ $\begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 \leq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ x_e è instabile $\forall k<1$

se invece $\boxed{k>1}$ $\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ x_e è localmente asintoticamente stabile

se $\boxed{k=1}$ $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases}$ caso critico

NOTA: il caso $k=0$ ($\lambda_2 = 0$) non è un caso critico perché per $k=0$ $\lambda_1 > 0$ e dunque x_e è instabile per tale scelta di k

Discussione del caso critico:

$k=1$ nelle equazioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{\alpha}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 > 0 \quad (\alpha > 0)$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ -x_1^2 - x_2 \end{bmatrix} = \alpha x_1^2 x_2 - x_1^2 x_2 - x_2^2$$

per $\alpha = 1 \Rightarrow \dot{V}(x) = -x_2^2 \leq 0$ (si annulla in tutti gli infiniti punti $(x_1, x_2) = (\alpha, 0)$, $\alpha > 0$)

Riassumendo:

- $k > 1$ x_e localmente asintoticamente stabile
- $k = 1$ x_e semplicemente stabile
- $k < 1$ x_e instabile.