TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 29-01-2019

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{4(s-8)}{s\,(s^2+16)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso–uscita $W(z)$;
4. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = 4e^{-2t} + e^{-t}$$

si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 2\sin(t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. utilizzando le informazioni ottenute, è possibile determinare il numero di poli della funzione di trasferimento senza svolgerne esplicitamente il calcolo?

Problema 5. (5 punti) Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2\,x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\,x_2(t) \end{cases}$$

utilizzando il metodo di Lyapunov con $V(x) = x_1^2 + 4\,x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2$.
In particolare:

1. Determinare l'intervallo dei valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ che rendono $V(x)$ definita positiva;
2. determinare un valore di α che consenta di dimostrare la stabilità dell'origine del sistema.

È possibile dedurre la stabilità dell'origine del sistema senza ricorrere al metodo di Lyapunov?

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
