TEORIA DEI SISTEMI - Compito d'esame del 08–09–2020

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Soluzione del Quesito 2.

Quesito 2. (40 minuti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. calcolare i modi naturali del sistema e discuterne le proprietà (stabilità, osservabilità ed eccitabilità). (*Raccomandazione: dopo aver calcolato gli autovalori della matrice A si verifichi la correttezza del risultato*);
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso–uscita $W(z)$;
4. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Soluzione estesa con richiami di teoria:

(*La soluzione riportata di seguito è in forma estesa, nel senso che molte formule vengono ridimostrate e discusse e i passaggi sono tutti riportati in forma estesa. Inoltre, il calcolo di A^t è svolto sia nel dominio del tempo che nel dominio delle trasformata Z. Per lo svolgimento del compito d'esame in realtà è richiesto molto meno spazio e tempo.*)

Per calcolare i modi naturali e la matrice di transizione dello stato, che a tempo discreto è $\Phi(t) = A^t$, cominciamo con il calcolare il polinomio caratteristico della matrice A, per poi successivamente calcolare autovalori e autovettori.

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right| = \left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} = \lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1.$$

Per calcolare le radici del polinomio caratteristico si può usare la classica formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. In alternativa, si può utilizzare la penultima espressione per il polinomio caratteristico nel modo seguente:

$$\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm j \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si hanno quindi due radici complesse coniugate

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j), \qquad \lambda_2 = \lambda_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j).$$

In questo caso è sufficiente calcolare solo gli autovettori destro r_1 e sinistro ℓ_1 associati a λ_1, in quanto è noto che gli autovettori associati a λ_2 sono i coniugati di r_1 e ℓ_1. Per calcolare i due autovettori occorre risolvere le due equazioni:

$$(\lambda_1 I - A) r_1 = 0, \qquad \ell_1^T (\lambda_1 I - A) = 0. \tag{1}$$

Ricordiamo che dalla definizione di autovalore si ha che la matrice $\lambda_1 I - A$ (la matrice dei coefficienti nelle due equazioni precedenti) deve avere deteminante nullo, in quanto λ_1 è una radice del polinomio caratteristico, e quindi annulla il determinante di $\lambda I - A$. Questo implica che le righe (e le colonne) della matrice $\lambda_1 I - A$ sono linearmente dipendenti, e pertanto le equazioni (1) ammettono infinite soluzioni. Procedendo con il calcolo della matrice dei coefficienti si ha:

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} j\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & j\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Come si vede le colonne sono linearmente dipendenti: sommando alla prima colonna la seconda moltiplicata per $-j$ si ha una colonna di zeri. Questa operazione in forma matriciale si scrive come segue

$$1 \cdot \begin{bmatrix} j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - j \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ j\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} j\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & j\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto ci si rende conto del fatto che il vettore $[1 \quad -j]^T$ che annulla il prodotto con la matrice dei coefficienti $\lambda_1 I - A$ è proprio un autovettore r_1:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (\lambda_1 I - A) r_1 = 0.$$

Ovviamente tutti i vettori che si ottengono moltiplicando r_1 per uno scalare sono ancora autovettori. Un altro modo di esprimere questo concetto consiste nel dire che r_1 è una base del *nullo* di $\lambda_1 I - A$ (lo spazio dei vettori che annullano il prodotto con $\lambda_1 I - A$, indicato anche con $\mathcal{N}(\lambda_1 I - A)$).

Analogo ragionamento si può fare per trovare un autovettore sinistro, che per il momento chiameremo $\tilde{\ell}_1^T$, anziché ℓ_1^T (a breve si capirà perché). Il ragionamento consiste nell'osservare che poiché il determinante di $\lambda_1 I - A$ è nullo, e quindi la matrice è singolare, anche le righe sono linearmente dipendenti (come lo erano le colonne). Infatti, sommando la prima riga con la seconda moltiplicata per j si ha una riga di zeri. Questa operazione in forma matriciale si scrive come segue

$$\begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & j\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{\ell}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix}: \quad \tilde{\ell}_1^T (\lambda_1 I - A) = 0.$$

Come per l'autovettore destro, la moltiplicazione di $\tilde{\ell}_1^T$ per uno scalare è ancora un autovettore. Quindi gli autovettori sinistri sono tutti vettori riga del tipo $\alpha \tilde{\ell}_1^T$, con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Tra tutti i possibili autovettori sinistri $\alpha \tilde{\ell}_1^T$ cerchiamo quello che moltiplicato per l'autovettore destro r_1 dia 1 come risultato, e lo chiameremo ℓ_1^T (quindi sarà tale che $\ell_1^T r_1 = 1$). Per trovare ℓ_1^T a partire da $\tilde{\ell}_1^T$ è sufficiente trovare un opportuno valore di α, che chiameremo $\bar{\alpha}$, tale che $\bar{\alpha}\tilde{\ell}_1^T r_1 = 1$. Potremo così definire $\ell_1^T = \bar{\alpha}\tilde{\ell}_1^T$.

Per calcolare $\bar{\alpha}$ e quindi $\ell_1^T = \bar{\alpha}\tilde{\ell}_1^T$ si procede come segue:

$$\bar{\alpha}\tilde{\ell}_1^T r_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{\tilde{\ell}_1^T r_1} \quad \Longrightarrow \quad \ell_1^T = \frac{1}{\tilde{\ell}_1^T r_1} \tilde{\ell}_1^T.$$

I passaggi precedenti spiegano quindi come calcolare correttamente ℓ_1^T a partire da $\tilde{\ell}_1^T$ e da r_1. Applicandoli al nostro quesito si ha:

$$\tilde{\ell}_1^T r_1 = \begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{\tilde{\ell}_1^T r_1} = \frac{1}{2}.$$

Da cui

$$\ell_1^T = \frac{1}{\tilde{\ell}_1^T r_1} \tilde{\ell}_1^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & j\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Pertanto, prendendo anche i coniugati, per la matrice A in esame si hanno i seguenti autovalori/autovettori

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j), \qquad r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}, \qquad \ell_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & j\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j), \qquad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}, \qquad \ell_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -j\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se definiamo la matrice degli autovettori destri $R = [\, r_1 \; r_2 \,]$ e quella degli autovettori sinistri $L = \begin{bmatrix} \ell_1^T \\ \ell_2^T \end{bmatrix}$, è facile verificare che il prodotto $R\,L$ è pari all'identità, e quindi $L = R^{-1}$.

Ricordiamo che per calcolare gli autovettori sinistri si sarebbe potuto procedere in modo diverso, partendo solamente dal calcolo dell'autovettore destro r_1 e del coniugato r_2. Basta infatti calcolare l'inversa della matrice degli autovettori destri $R = [\, r_1 \; r_2 \,]$ per ottenere $L = R^{-1}$, le cui righe contengono gli autovettori sinistri ℓ_1^T e ℓ_2^T.

Per completezza riportiamo di seguito le espressioni delle matrici R e L per l'esercizio in esame, ed anche la matrice Λ con gli autovalori sulla diagonale:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad R = [\, r_1 \; r_2 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} \ell_1^T \\ \ell_2^T \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix}$$

Ricordiamo anche che la decomposizione spettrale della matrice A può essere scritta nei due modi seguenti

$$A = R\Lambda L, \qquad A = \lambda_1 r_1 \ell_1^T + \lambda_2 r_2 \ell_2^T.$$

Poiché nell'esercizio in esame nella seconda espressione il prodotto $\lambda_2 r_2 \ell_2^T$ è il coniugato di $\lambda_1 r_1 \ell_1^T$, la decomposizione spettrale può anche essere scritta come

$$A = 2\Re(\lambda_1 r_1 \ell_1^T).$$

Prima di rispondere alla domanda 1 sui modi naturali effettuiamo il calcolo della matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$. A tale scopo si può utilizzare la decomposizione spettrale per scrivere le seguenti espressioni analitiche (equivalenti) delle potenze di A:

$$A^t = R\Lambda^t L, \qquad A^t = \lambda_1^t r_1 \ell_1^T + \lambda_2^t r_2 \ell_2^T \qquad A^t = 2\Re(\lambda_1^t r_1 \ell_1^T).$$

Ricordiamo che la matrice A^t è la matrice di transizione dello stato a tempo discreto ($\Phi(t) = A^t$). Per poter eseguire il calcolo di A^t occorre avere a disposizione una formula semplice per λ_1^t. Risulta conveniente esprimere λ_1 come modulo e fase:

$$\lambda_1 = |\lambda_1| e^{j\langle\lambda_1\rangle}.$$

Ricordando la formula di Eulero $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$, si ha

$$e^{j\langle\lambda_1\rangle t} = \cos(\langle\lambda_1\rangle t) + j\sin(\langle\lambda_1\rangle t)$$

e pertanto possiamo scrivere

$$\lambda_1^t = |\lambda_1|^t e^{j\langle\lambda_1\rangle t} = |\lambda_1|^t \big(\cos(\langle\lambda_1\rangle t) + j\sin(\langle\lambda_1\rangle t)\big).$$

Nel caso in esame abbiamo $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$, e quindi

$$|\lambda_1| = \sqrt{\Re(\lambda_1)^2 + \Im(\lambda_1)^2} = 1, \qquad \langle\lambda_1\rangle = \tan^{-1}\left(\frac{\Im(\lambda_1)}{\Re(\lambda_1)}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Quindi

$$\lambda_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad \text{e} \quad \lambda_1^t = e^{j\frac{\pi}{4}t} = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

La decomposizione spettrale $A^t = 2\Re(\lambda_1^t r_1 \ell_1^T)$ si scrive quindi

$$A^t = 2\Re\left(e^{j\frac{\pi}{4}t}\begin{bmatrix}1\\-j\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & j\end{bmatrix}\right) = \Re\left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)\begin{bmatrix}1 & j\\-j & 1\end{bmatrix}\right).$$

Da cui

$$A^t = \Re\left(\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) & j\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\\ -j\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\end{bmatrix}\right).$$

Prendendo la parte reale nella formula precedente si ha finalmente l'espressione cercata per la matrice di transizione:

$$\Phi(t) = A^t = \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Peer verificare la correttezza di questa espressione è conveniente verificare il risultato di $\Phi(0) = A^0$, che deve restituire l'identità, e di $\Phi(1) = A^1$ che deve restituire la matrice A originaria. La verifica che $\Phi(0) = I$ è immediata, come anche la verifica che $\Phi(1) = A$, tenuto conto del fatto che $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Un modo alternativo di calcolare A^t è quello di utilizzare la trasformata Z. Ricordiamo che

$$Z(A^t) = z(zI - A)^{-1} \qquad \text{da cui} \qquad A^t = Z^{-1}\big(z(zI - A)^{-1}\big). \tag{3}$$

Per poter procedere in questo modo è necessario però ricordare le trasformate di funzioni sinusoidali.

Di seguito procediamo al calcolo della trasformata della funzione $\sin(\beta t)$ utilizzando la formula di Eulero, la trasformata Z di a^t e la proprietà di linearità della trasformata Z:

$$Z(a^t) = \frac{z}{z-a}, \qquad sin(\beta t) = \frac{e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}}{2j} \qquad Z(\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) = \alpha_1 Z(f_1(t)) + \alpha_2 Z(f_2(t)).$$

Svolgendo i calcoli

$$\begin{aligned}
Z(\sin(\beta t)) &= \frac{1}{2j} Z\big((e^{j\beta})^t\big) - \frac{1}{2j} Z\big((e^{-j\beta})^t\big) = \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\beta}} - \frac{z}{z-e^{-j\beta}}\right) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{z(z-e^{-j\beta}-(z-e^{j\beta}))}{(z-e^{j\beta})(z-e^{-j\beta})}\right) = \frac{1}{2j}\frac{z(e^{j\beta}-e^{-j\beta}))}{(z^2-(e^{j\beta}+e^{-j\beta})z+e^{j\beta}e^{-j\beta}} \\
&= \frac{z\sin(\beta)}{z^2-2z\cos(\beta)+1}.
\end{aligned}$$

Svolgendo calcoli analoghi si può calcolare la trasformata di $\cos(\beta t) = (e^{j\beta t}+e^{-j\beta t})/2$:

$$\begin{aligned}
Z(\cos(\beta t)) &= \frac{1}{2} Z\big((e^{j\beta})^t\big) + \frac{1}{2} Z\big((e^{-j\beta})^t\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\beta}} + \frac{z}{z-e^{-j\beta}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z(z-e^{-j\beta}+z-e^{j\beta}))}{(z-e^{j\beta})(z-e^{-j\beta})}\right) = \frac{1}{2}\frac{z(2z-(e^{j\beta}+e^{-j\beta}))}{(z^2-(e^{j\beta}+e^{-j\beta})z+e^{j\beta}e^{-j\beta}} \\
&= \frac{z(z-\cos(\beta))}{z^2-2z\cos(\beta)+1}.
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$Z(\sin(\beta t)) = \frac{z\sin(\beta)}{z^2-2z\cos(\beta)+1}, \qquad Z(\cos(\beta t)) = \frac{z(z-\cos(\beta))}{z^2-2z\cos(\beta)+1}.$$

Riprendendo il calcolo alternativo di $\Phi(t) = A^t$ mediante la formula (3), svolgendo i calcoli si ha

$$z(zI-A)^{-1} = \frac{z}{|zI-A|}\begin{bmatrix} z-a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & z-a_{11}\end{bmatrix} = \frac{z}{z^2-\sqrt{2}z+1}\begin{bmatrix} z-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & z-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

Per antitrasformare $z(zI-A)^{-1}$ occorre calcolare le antitrasformate di

$$[z(zI-A)^{-1}]_{11} = \frac{z\big(z-\frac{1}{\sqrt{2}}\big)}{z^2-\sqrt{2}z+1}, \quad [z(zI-A)^{-1}]_{21} = \frac{z\frac{1}{\sqrt{2}}}{z^2-\sqrt{2}z+1}$$

Ricordando che $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ possiamo riscrivere

$$[z(zI-A)^{-1}]_{11} = \frac{z\big(z-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\big)}{z^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)z+1}, \quad [z(zI-A)^{-1}]_{21} = \frac{z\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{z^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)z+1}$$

da cui

$$Z^{-1}\left([z(zI-A)^{-1}]_{11}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \qquad Z^{-1}\left([z(zI-A)^{-1}]_{21}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

Pertanto l'antitrasformazione della matrice $z(zI-A)^{-1}$ restituisce l'espressione (2) per A^t.

Abbiamo visto fino ad ora come calcolare A^t sia utilizzando la decomposizione spettrale, sia la trasformata Z, vediamo ora di rispondere al quesito 1: *calcolare i modi naturali del sistema e discuterne le proprietà (stabilità, osservabilità ed eccitabilità).*

Ricordiamo che l'evoluzione libera dello stato può essere decomposta in *modi naturali* grazie alla decomposizione spettrale della matrice di transizione. Nel caso di due autovalori complessi coniugati si ha

$$x(t) = A^t x(0) = \lambda_1^t r_1 \ell_1^T x(0) + \lambda_2^t r_2 \ell_2^T x(0) = 2\Re(\lambda_1^t r_1 \ell_1^T x(0)).$$

Chiamando $z_1(0) = \ell_1^T x(0)$ e $z_2(0) = \ell_2^T x(0)$, e ricordando che per $x(0)$ reale si ha $z_2(0) = z_1^*(0)$ si ha

$$x(t) = \lambda_1^t r_1 z_1(0) + \lambda_2^t r_2 z_2(0) = 2\Re(\lambda_1^t r_1 z_1(0)).$$

Decomponendo l'autovettore r_1 nella sua parte reale e parte immaginaria e riscrivendo il numero complesso $z_1(0)$ come modulo e fase nel modo seguente

$$r_1 = r_{1,a} + jr_{1,b}, \qquad z_1(0) = |z_1(0)|e^{j\langle z_1(0)\rangle},$$

avremo

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\Re\big(|\lambda_1|^t e^{j\langle\lambda_1\rangle t}(r_{1,a}+jr_{1,b})|z_1(0)|e^{j\langle z_1(0)\rangle}\big) = 2|z_1(0)|\Re\big(|\lambda_1|^t e^{j(\langle\lambda_1\rangle t+\langle z_1(0)\rangle)}(r_{1,a}+jr_{1,b})\big) \\
&= 2|z_1(0)||\lambda_1|^t\Re\big((\cos(\langle\lambda_1\rangle t+\langle z_1(0)\rangle)+j\sin(\langle\lambda_1\rangle t+\langle z_1(0)\rangle))(r_{1,a}+jr_{1,b})\big)
\end{aligned}$$

Per rendere più leggibile questa espressione poniamo

$$\omega = \langle \lambda_1 \rangle, \quad m = |z_1(0)|, \quad \varphi = \langle z_1(0) \rangle,$$

così da avere

$$x(t) = 2m|\lambda_1|^t \Re\big((\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))(r_{1,a} + j r_{1,b})\big).$$

Prendento la parte reale si ha l'espressione finale dell'unico modo naturale del sistema in esame (*un* modo naturale associato ad una *coppia* di autovalori complessi coniugati):

$$x(t) = 2m|\lambda_1|^t \big(r_{1,a} \cos(\omega t + \varphi) - r_{1,b} \sin(\omega t + \varphi)\big).$$

Si osservi che il modulo m e la fase φ dipendono dallo stato inizale $x(0)$ ($m = |\ell_1^T x(0)|$ e $\varphi = \langle \ell_1^T x(0) \rangle$, mentre tutte le altre costanti dipendono esclusivamente dalla matrice A (in particolare, la pulsazione ω è la fase dell'autovalore λ_1).

Fin qui sono stati riportati i calcoli *simbolici* in un caso generale, che adesso possiamo applicare all'esercizio in esame.

Con riferimento alla coppia autovalore-autovettore (λ_1, ℓ_1) dell'esercizio in esame, abbiamo:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad r_{1,a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_{1,b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} |\lambda_1| = 1, \\ \langle \lambda_1 \rangle = \omega = \dfrac{\pi}{4}. \end{matrix}$$

Pertanto il modo naturale si scrive:

$$x(t) = 2m \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4} t + \varphi\right) - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{4} t + \varphi\right) \right) = 2m \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} t + \varphi) \\ \sin(\frac{\pi}{4} t + \varphi) \end{bmatrix}.$$

(Il coefficiente m e la fase φ non vengono specificati perché cambiano con lo stato iniziale.)

Il modo naturale è semplicemente stabile (non diverge, né converge a zero, ma oscilla in modo persistente e limitato), come si vede dall'espressione precedente. Questa proprietà dipende dal fatto che $|\lambda_1| = 1$.

Verifichiamo ora se abbiamo l'eccitabilità del modo naturale per impulsi in ingresso ($\ell_1^T B \neq 0$) e l'osservabilità dall'uscita ($C r_1 \neq 0$):

$$C r_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} = 1, \qquad \ell_1^T B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{j}{2}.$$

Poiché entrambi i prodotti sono diversi da zero, concludiamo che il modo naturale è eccitabile ed osservabile.

Passiamo ora al terzo quesito: il calcolo della risposta impulsiva. Il calcolo può essere svolto sia nel dominio del tempo, utilizzando la matrice di transizione:

$$w(t) = \begin{cases} D & \text{per } t = 0 \\ C A^{t-1} B & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

sia nel dominio della variabile complessa z utilizzando la trasformata di A^t

$$w(t) = Z^{-1} \left(z C (zI - A)^{-1} B + D \right).$$

Ricordando che nel nostro problema abbiamo $D = 0$, nel dominio del tempo si ha

$$w(0) = 0, \qquad w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right), \quad t > 0.$$

Utilizzando la funzione gradino discreto $\delta_{-1}(t)$ (ricordiamo che $\delta_{-1}(t) = 1$ per $t \geq 0$ e $\delta_{-1}(t) = 0$ per $t < 0$) possiamo riscrivere

$$w(t) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right) \delta_{-1}(t-1), \quad t \geq 0,$$

e per il calcolo della funzione di trasferimento $W(z)$, che è la trasformata Z della risposta impulsiva $w(t)$, possiamo utilizzare il teorema del ritardo:

$$Z\left(f(t-1)\delta(t-1)\right) = \frac{1}{z} Z\left(f(t)\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned}W(z) &= Z(w(t)) = Z\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)\delta_{-1}(t-1)\right) = -\frac{1}{z}Z\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)\\ &= -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{z^2-2z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(z^2-\sqrt{2}z+1)}.\end{aligned}$$

Lo stesso risultato si ottiene immediatamente dall'espressione $W(z) = C(zI-A)^{-1}B + D$, ricordando che $D = 0$ nel nostro esercizio.

Per calcolare la risposta al gradino utilizzando la trasformata Z, è opportuno analizzare la fattorizzazione del denominatore della $W(z)$, ricordando che si tratta del polinomio caratteristico del sistema in esame, e che quindi ha le radici λ_1 e λ_2 complesse coniugate viste in precedenza, che ammettono la seguente rappresentazione modulo e fase $\lambda_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}$, $\lambda_2 = e^{-j\frac{\pi}{4}}$. Pertanto

$$z^2-\sqrt{2}z+1 = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2) = \left(z-e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-e^{-j\frac{\pi}{4}}\right),$$

e quindi

$$W(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(z^2-\sqrt{2}z+1)} \qquad \text{o} \qquad W(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\left(z-e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}. \tag{4}$$

Nel seguito, a seconda della necessità, utilizzeremo una delle due espressioni per la $W(z)$.

Per calcolare la risposta (forzata) al gradino si utilizzeranno le trasformate Z. Ricordiamo che la trasformata della risposta $y(t)$ ad un ingresso $u(t)$ si ottiene moltiplicando la $W(z)$ (trasformata della risposta impulsiva) per la trasformata dell'ingresso $U(z)$. Si ha quindi

$$Y(z) = W(z)U(z) \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = Z^{-1}(W(z)U(z)).$$

Nel nostro esercizio l'ingresso è il gradino unitario $\delta_{-1}(t)$, la cui trasformata Z è $U(z) = z/(z-1)$. Per poter agevolmente calcolare l'antitrasformata della $Y(z)$ conviene effettuare lo sviluppo in frazioni parziali del rapporto $Y(z)/z$. Avremo quindi:

$$Y(z) = W(z)U(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(z^2-\sqrt{2}z+1)}\frac{z}{(z-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{z}{(z-e^{j\frac{\pi}{4}})(z-e^{-j\frac{\pi}{4}})(z-1)}.$$

(Si tenga sempre a mente che $z^2-\sqrt{2}z+1 = (z-e^{j\frac{\pi}{4}})(z-e^{-j\frac{\pi}{4}})$.)
Calcoliamo ora lo sviluppo in frazioni parziali (poli e residui) di $Y(z)/z$:

$$\frac{Y(z)}{z} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(z^2-\sqrt{2}z+1)(z-1)} = \frac{R_1}{z-e^{j\frac{\pi}{4}}} + \frac{R_2}{z-e^{-j\frac{\pi}{4}}} + \frac{R_3}{z-1}.$$

Tenendo conto che il residuo R_2 associato al polo $e^{-j\frac{\pi}{4}}$ è il coniugato del residuo R_1 associato a $e^{j\frac{\pi}{4}}$, è sufficiente calcolare i residui R_1 e R_3.

$$\begin{aligned}R_1 &= \lim_{z\to e^{j\frac{\pi}{4}}}\frac{Y(z)}{z}(z-e^{j\frac{\pi}{4}}) = \lim_{z\to e^{j\frac{\pi}{4}}} -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(z-e^{-j\frac{\pi}{4}})(z-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(e^{j\frac{\pi}{4}}-e^{-j\frac{\pi}{4}})(e^{j\frac{\pi}{4}}-1)}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-1+j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}.\end{aligned}$$

Ricordando che $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$R_1 = -\frac{1}{2j}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(1+j(\sqrt{2}-1))}. \tag{5}$$

Il calcolo di R_3 è molto semplice:

$$\begin{aligned}R_3 &= \lim_{z\to 1}\frac{Y(z)}{z}(z-1) = \lim_{z\to 1} -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(z^2-\sqrt{2}z+1)} = W(1)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(2-\sqrt{2})} = \frac{1}{2(1-\sqrt{2})} \approx -1,21.\end{aligned} \tag{6}$$

La trasformata dell'uscita pertanto è:

$$Y(z) = R_1\frac{z}{z-e^{j\frac{\pi}{4}}} + R_1^*\frac{z}{z-e^{-j\frac{\pi}{4}}} + R_3\frac{z}{z-1}.$$

Ricordando la trasformata fondamentale $Z(a^t) = z/(z-a)$ è facile antitrasformare $Y(z)$:

$$y(t) = Z^{-1}(Y(z)) = \left(R_1 e^{j\frac{\pi}{4}t} + R_1^* e^{-j\frac{\pi}{4}t} + R_3\right)\delta_{-1}(t). \tag{7}$$

Dove R_1 è il numero complesso (5) e R_3 il numero reale (6). L'espressione (7) della risposta al gradino $y(t)$ è un'espressione complessa, che si può trasformare in un espressione reale tenendo conto che i primi due termini della somma sono complessi coniugati, e pertanto

$$R_1 e^{j\frac{\pi}{4}t} + R_1^* e^{-j\frac{\pi}{4}t} = 2\Re(R_1 e^{j\frac{\pi}{4}t})$$

Riscrivendo il numero complesso R_1 nella forma modulo e fase: $R_1 = |R_1|e^{j\varphi}$, con $\varphi = \langle R_1 \rangle$, abbiamo

$$2\Re\left(R_1 e^{j\frac{\pi}{4}t}\right) = 2\Re\left(|R_1|e^{j\varphi}e^{j\frac{\pi}{4}t}\right) = 2|R_1|\Re\left(e^{j\left(\frac{\pi}{4}t+\varphi\right)}\right) = 2|R_1|\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\varphi\right).$$

Di seguito il calcolo del modulo e della fase di R_1 sulla base dell'espressione (5):

$$|R_1| = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}} \approx 0,78,$$

$$\varphi = \langle R_1 \rangle = -\tan^{-1}(\sqrt{2}-1) \approx 0,39 \ rad$$

In conclusione, la risposta (forzata) al gradino del sistema in esame è pari a

$$y(t) = \left(2|R_1|\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\varphi\right) + R_3\right)\delta_{-1}(t),$$

dove i valori numerici di $|R_1|$, φ e R_3 sono quelli precedentemente riportati.