TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Quesiti d'esame del 23 giugno 2021

Gruppo 1

60 minuti

Quesito 1 (9 punti, tempo stimato 45 minuti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{2(s+10)}{(s-2)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.
4. Si calcoli la risposta armonica del sistema a ciclo aperto, per $K = 1$, all'ingresso $u(t) = 4\cos(5t)$, verificandone la congruenza con i diagrammi di Bode tracciati.

Quesito 2 (4 punti, tempo stimato: 15 minuti) Sia dato un sistema lineare e stazionario a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = 0.2^t - 0.8^t,$$

1. se ne calcoli la risposta al gradino unitario;
2. indicando con $w_{-1}(t)$ la risposta al gradino unitario, si verifichi la seguente relazione

$$w(t) = w_{-1}(t) - w_{-1}(t-1).$$

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Quesiti d'esame del 16 febbraio 2021

Gruppo 2

50 minuti

Quesito 3 (5 punti, tempo stimato: 35 minuti) Sia dato il seguente sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

1. Si calcoli la decomposizione spettrale della matrice A e si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. Si determinino delle basi per i quattro sottospazi $\mathcal{X}_1$,$\mathcal{X}_2$,$\mathcal{X}_3$,$\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman.
3. Si determino gli stati iniziali che danno luogo alla seguente evoluzione libera dell'uscita: $y(t) = 1$, $\forall t \geq 0$.

Quesito 4 (4 punti, tempo stimato: 15 minuti) Sia dato un sistema lineare e stazionario a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ in cui la matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ha una coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda_{1,2} = 1 \pm j$, a cui corrisponde la coppia di autovettori destri:

$$r_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm j \end{bmatrix}.$$

Si calcoli l'evoluzione libera dello stato in corrispondenza allo stato iniziale $x(0) = [0 \;\; 1]^T$.

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Quesiti d'esame del 16 febbraio 2021

Gruppo 3

45 minuti

Quesito 5 (5 punti, tempo stimato: 30 minuti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (k-1)x_2(t) - 3kx_2^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = k\,x_1(t) + (k-1)x_2(t) - 5k^2x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$$

1. Si verifichi che $x_e = (0,0)$ è un punto di equilibrio;
2. Si studi la stabilità del punto di equilibrio al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione con la seguente struttura:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{\alpha}{4}x_2^4.$$

Quesito 6 (4 punti, tempo stimato: 15 minuti)
Si studi per quali valori di α, β e γ le seguenti forme quadratiche sono definite positive:

$$V_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + \alpha\,x_1x_2, \quad V_2(x) = 2x_1^2 + \beta x_2^2 + 2x_1x_2, \quad V_3(x) = 3x_1^2 + 2\gamma\,x_2^2 + \gamma\,x_1x_2.$$
