TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 15-2-2022

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\frac{32\,(s+1)}{(s^2+4s+16)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo discreto caratterizzato dalla seguente funzione di transizione dello stato:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2^t & 0 \\ 2^t - \left(\frac{1}{2}\right)^t & \left(\frac{1}{2}\right)^t \end{bmatrix}.$$

e dalle matrici $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = 0$.

1. Si calcoli la matrice A;
2. si discutano le proprietà dei modi naturali;
3. si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita;
4. si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e la risposta forzata a $u(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t)$.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo continuo a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento ingresso-uscita:

$$W(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)}$$

si calcolino la risposta impulsiva e la risposta forzata al gradino unitario. Inoltre, dopo aver verificato le condizioni d'esistenza della risposta a regime permanente, si calcoli la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2\,x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\,x_2(t) \end{cases}$$

utilizzando il metodo di Lyapunov con $V(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2$.
In particolare:

1. Determinare l'intervallo dei valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ che rendono $V(x)$ definita positiva;
2. determinare un valore di α che consenta di dimostrare la stabilità dell'origine del sistema.

È possibile dedurre la stabilità dell'origine del sistema senza ricorrere al metodo di Lyapunov?

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
