SCRITTO D'ESAME DI TEORIA DEI SISTEMI DEL 16·6·2022

SOLUZIONE SINTETICA
A CURA DI V. DE IULIIS

per segnalazioni/chiarimenti:
VITTORIO.DEIULIIS@UNIVAQ.IT

Problema 1

$$W_{AP}(s) = K \frac{5(s+10)}{(s+1)(s^2+25)}$$

Iniziamo dal tracciamento dei diagrammi di Bode e polare per $K=1$:

$$W(s) = W_{AP}(s)\Big|_{K=1} = \frac{50\left(1+\frac{s}{10}\right)}{25(1+s)\left(1+\frac{s^2}{25}\right)}$$

$K = 2 \qquad K_{dB} = 6\ dB$

BINOMIO AL NUM. $\quad s+10 \qquad \omega_{t_2} = 10\ rad/s$

MODULI: $+20\ dB/dec\ [10, +\infty)$

FASI: $+\frac{\pi}{4}\ rad/dec\ [1, 100)$

BINOMIO AL DEN.: $\quad s+1 \qquad \omega_{t_1} = 1\ rad/s$

MODULI: $-20\ dB/dec\ [1, +\infty)$

FASI: $-\frac{\pi}{4}\ rad/dec\ [0.1, 10]$

TRINOMIO AL DEN $\quad s^2+25 \qquad \omega_n = 5\ rad/s$

non smorzato $\zeta = 0$

MODULI $+40\ dB/dec\ [5, +\infty)$
(picco di amplificazione in ω_n)

FASI: sfasamento istantaneo di $-\pi$ in ω_n

MODULI

$\omega < 1$	$0\ dB/dec$
$\omega \in (1,5)$	$-20\ dB/dec$
$\omega \in (5,10)$	$-60\ dB/dec$
$\omega > 10$	$-40\ dB/dec$

FASI

$\omega < 0.1$	$0\ rad/dec$
$\omega \in (0.1, 1)$	$-\pi/4\ rad/dec$
$\omega \in (1, 10)$	$0\ rad/dec$
$\omega \in (10, 100)$	$+\frac{\pi}{4}\ rad/dec$
$\omega > 100$	$0\ rad/dec$

SALTO di $-\pi$ in $\omega_n = 5$!

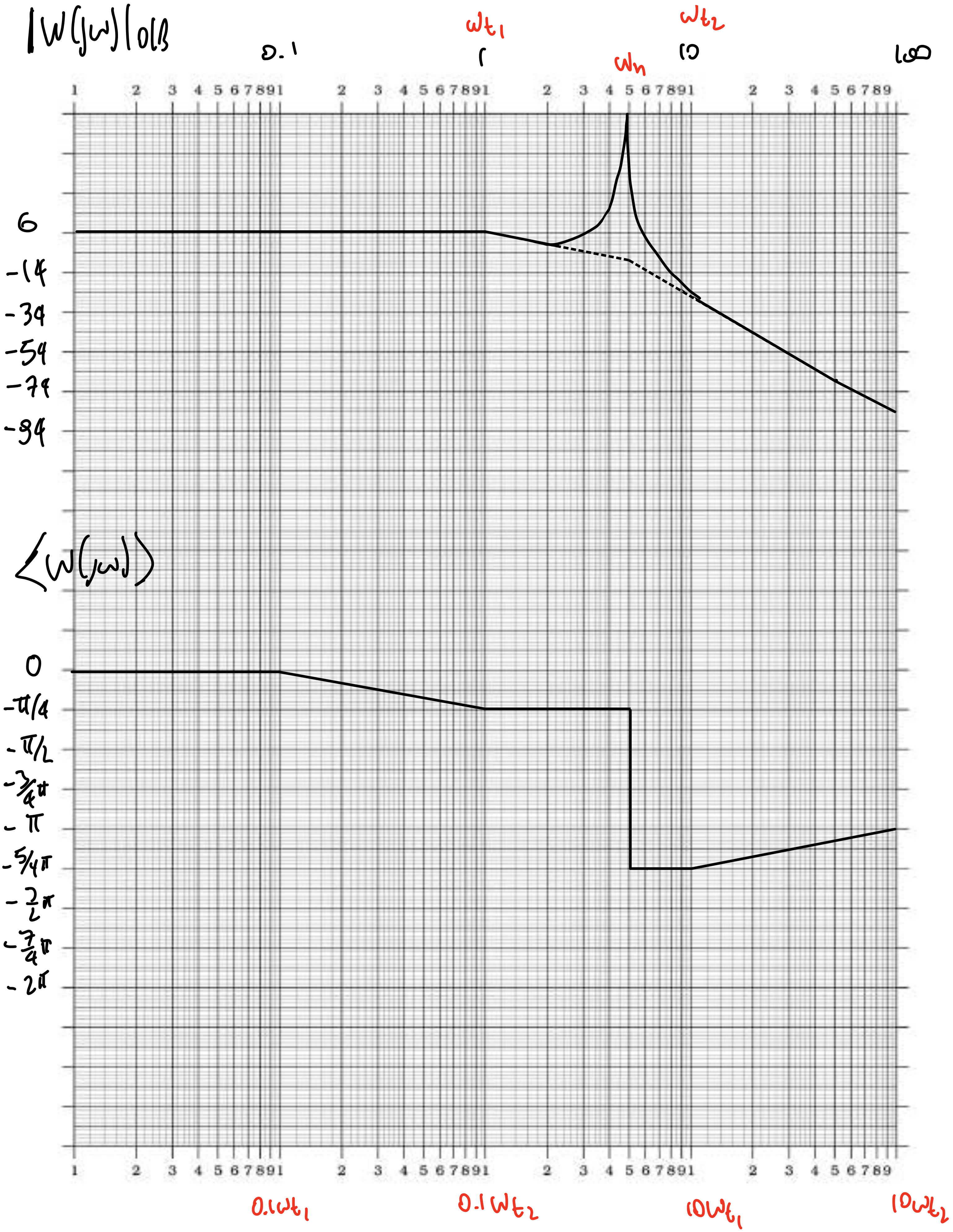
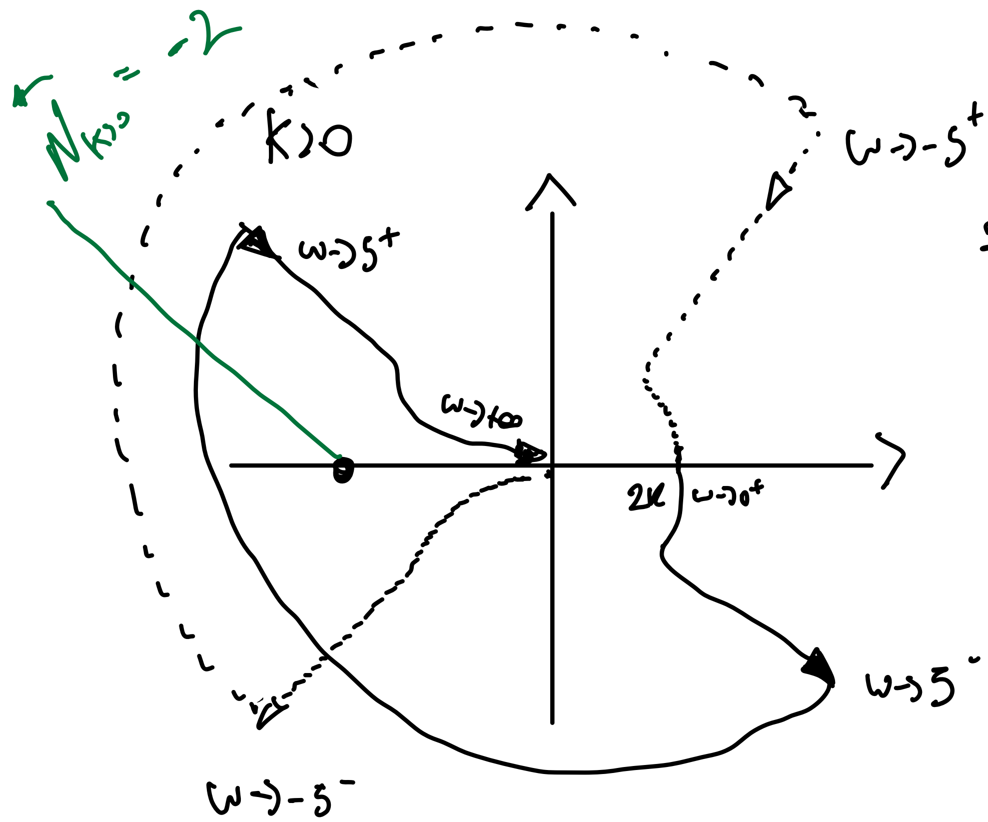

|W(jω)|dB
ωt1
ωt2
ωn
0.1
1
10
100
6
-14
-34
-54
-74
-94
∠W(jω)
0
-π/4
-π/2
-3/4π
-π
-5/4π
-3/2π
-7/4π
-2π
0.1ωt1
0.1ωt2
10ωt1
10ωt2

Diagramma polare di W_{AP} per $K>0$



$\forall K>0$

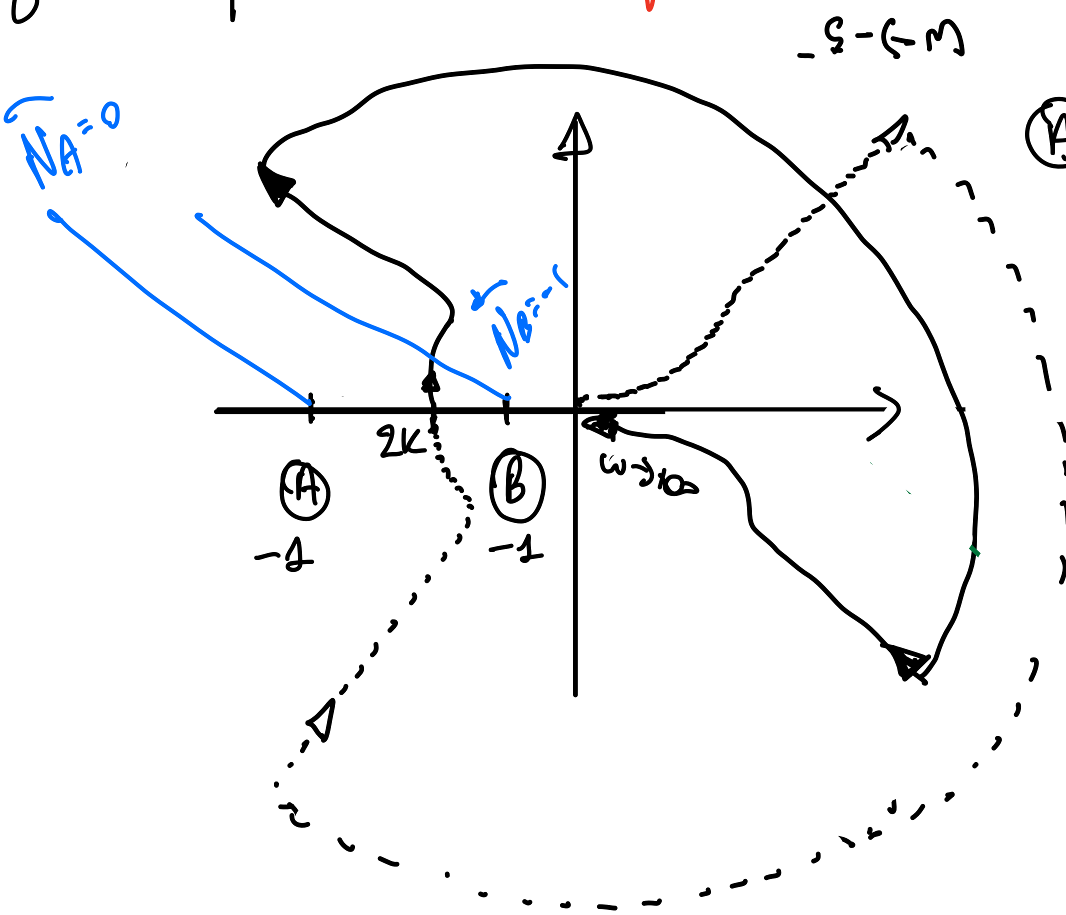
$P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N}_{K>0} = 2$

$\Uparrow$

0

INSTABILITA' A CICLO CHIUSO $\forall K>0$

Diagramma polare di W_{AP} per $K<0$



(A) : $-1 < 2K$

cioe' $K \in (-\frac{1}{2}, 0)$

$P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N}_A = 0$

STABILITA'

(B) : $2K < -1$

cioe' $K \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

$P_{CH} = P_{AP} - \tilde{N}_B = 1$

INSTABILITA'

Dunque:

$$\begin{cases} P_{CH} = 2 & \text{se} \quad K \in (0, +\infty) \quad \text{INSTABILITA'} \\ P_{CH} = 1 & \text{se} \quad K \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{INSTABILITA'} \\ P_{CH} = 0 & \text{se} \quad K \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{STABILITA' ASINTOTICA} \end{cases}$$

Calcolo il denominatore della f.d.t. a ciclo chiuso:

$$D_{CH}(s) = N_{AP}(s) + D_{AP}(s) =$$

$$= 5K(s+10) + (s+1)(s^2+25)$$

$$= 5Ks + 50K + s^3 + 25s + s^2 + 25$$

$$= s^3 + s^2 + 5(K+5)s + 25(1+2K)$$

Costruisco la tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 5(K+5) \\ 2 & 1 & 25(1+2K) \\ 1 & b_1 & \\ 0 & \cancel{25}(1+2K) & \end{array}$$

$$b_1 = -25(1+2K) + 5(K+5)$$

$$= -\cancel{25} - 50K + 5K + \cancel{25}$$

$$= -45K$$

1ª colonna: $\quad 1 \quad 1 \quad -K \quad 1+2K$

Discuto il segno dei termini della prima colonna al variare di K

		$-\frac{1}{2}$		0	
1	$+$		$+$		$+$
1	$+$		$+$		$+$
$-k$	$+$		$+$		$-$
$1+2k$	$-$		$+$		$+$
	$1V$		$0V$		$2V$

Conferma l'ordine visto con Nyquist.

Problema 2 Dato il sistema a tempo continuo $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ con:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Discutere le proprietà dei modi naturali
2) Calcolare $\Phi(t) = e^{At}$ e $W(t)$
3) Calcolare $W(s)$ e la risposta forzata al gradino unitario.

1) $\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{Vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{Vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 1 = 0$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i \begin{cases} \lambda_1 = 2+i \\ \lambda_2 = 2-i \end{cases}$$

entrambi i modi oscillanti sono instabili $Re(\lambda_i) = 2 > 0 \quad i = 1,2$

2) $e^{At} = Re^{\Lambda t}L = 2Re\{e^{\lambda_1 t} r_1 l_1^T\}$

$r_1 : (\lambda_1 I - A) r_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ix + y = 0 & y = -ix \\ -x - iy = 0 \end{cases} \quad r_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$

per $x = 1 \Rightarrow r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$r_2 = r_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$

$$L = \begin{bmatrix} l_1^T \\ l_2^T \end{bmatrix} = R^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow l_1^T \\ \rightarrow l_2^T \end{matrix}$$

$$C \cdot r_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 2 \neq 0 \qquad (\text{idem } C \cdot r_2)$$

$$l_1^T B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 - i \neq 0 \qquad (\text{idem } l_2^T B)$$

entrambi i modi sono eccitabili e osservabili in uscita.

$$e^{At} = \cancel{2}\mathrm{Re}\left\{ e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{\tfrac{1}{2}} & -\cancel{\tfrac{1}{2i}} \end{pmatrix} \right\} = e^{2t}\,\mathrm{Re}\left\{ e^{it} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= e^{2t}\,\mathrm{Re}\left\{ \begin{bmatrix} \cos(t) + i\sin(t) & i\cos(t) - \sin(t) \\ -i\cos(t) + \sin(t) & \cos(t) + i\sin(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos(t) & -e^{2t}\sin(t) \\ e^{2t}\sin(t) & e^{2t}\cos(t) \end{bmatrix}$$

$$e^{At}\Big|_{t=0} = I \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{d}{dt} e^{At}\right)_{t=0} = \begin{bmatrix} 2e^{2t}\cos(t) - e^{2t}\sin(t) & -2e^{2t}\sin(t) - e^{2t}\cos(t) \\ 2e^{2t}\sin(t) + e^{2t}\cos(t) & 2e^{2t}\cos(t) - e^{2t}\sin(t) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$W(t) = Ce^{At}B + \cancel{D\delta(t)}^{\,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t}\cos(t) & -e^{2t}\sin(t) \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= 2e^{2t}\left(\cos(t) + \sin(t)\right)$$

$$W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = 2\mathcal{L}\{e^{2t}\cos(t)\} + 2\mathcal{L}\{e^{2t}\sin(t)\}$$

$$= \frac{2(s-2)}{(s-2)^2+1} + \frac{2}{(s-2)^2+1} = \frac{2(s-1)}{s^2-4s+5}$$

<u>NOTA</u>: $(s-2)^2+1 = s^2-4s+5 = (s-2-i)(s-2+i)$

$$Y_g(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{2(s-1)}{s(s-2+i)(s-2-i)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s-2-i} + \frac{R_2^*}{s-2+i}$$

$$R_1 = \lim_{s\to 0} Y_g(s)\, s = \lim_{s\to 0} \frac{2(s-1)}{s^2-4s+5} = -\frac{2}{5}$$

$$R_2 = \lim_{s\to 2+i} Y_g(s)\cdot(s-2-i) = \lim_{s\to 2+i} \frac{2(s-1)}{s(s-2+i)} = \frac{\cancel{2}(1+i)}{(2+i)(\cancel{2}i)}$$

$$= \frac{1+i}{2i-1} = \frac{(1+i)(-1-2i)}{1+4} = \frac{-1-2i-i+2}{5} = \frac{1}{5} - i\frac{3}{5}$$

$$R_2^* = \frac{1}{5} + i\frac{3}{5} \qquad R_1 + R_2 + R_2^* = 0 \ \checkmark$$

$$Y_g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_g(s)\} = -\frac{2}{5}\delta_{-1}(t) + \left(\frac{1}{5} + i\frac{3}{5}\right)e^{(2+i)t} + \left(\frac{1}{5} - i\frac{3}{5}\right)e^{(2-i)t}$$

$$y_g(t) = -\frac{2}{5}\delta_{-1}(t) + \frac{1}{5}e^{2t}\left(e^{it} + e^{-it}\right) + i\frac{3}{5}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \quad t \geq 0$$

$$= \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{5}e^{2t}\cos(t) + \frac{6}{5}e^{2t}\sin(t)\right)\delta_{-1}(t)$$

<u>Problema 3</u> Dato il sistema lineare e stazionario e un ingresso e una uscita caratterizzato da: $\begin{cases} W(0) = 0 \\ W(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{t-1} & t \geq 0 \end{cases}$

si calcoli la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

$$W(z) = \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{t-1}\right\} = \frac{\mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{t}\right\}}{z} = \frac{1}{z - \frac{1}{4}}$$

l'unico modo osservabile ed eccitabile è asintoticamente stabile $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$

$u(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$: $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad, $\varphi = 0$, $M = 1$

$$y_{arm}(t) = |W(e^{j\frac{\pi}{2}})| \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \angle W(e^{j\frac{\pi}{2}})\right)$$

$$W(e^{j\frac{\pi}{2}}) = W(j) = \frac{1}{j - \frac{1}{4}}$$

$$|W(j)| = \left|\frac{1}{j - \frac{1}{4}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + 1}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\angle W(j) = \angle 1 - \angle\left(-\frac{1}{4} + j\right) = -\arctan(-4) - \pi \simeq -1{,}82$$

$$y_{sim}(t) = \frac{4}{\sqrt{17}} \sin\left(\frac{\pi}{2}t - 1{,}82\right)$$

Problema 4

Sistema T.D. $\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$ caratterizzato da:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

- Calcolare basi per $\mathcal{R}$, $\mathcal{I}$ e $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4$
- Determinare $x_A(0)$ e $x_B(0)$ t.c. $y_{lib}(t) = 1$ $t = 0,1,2,3$ e $y_{lib}(t) = 0$ $t = 0,1,2,3$

Matrice di raggiungibilità $R_4 = [B \; AB \; A^2B \; A^3B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matrice di osservabilità $O_4 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Il rango di R_4 è 2 $\Rightarrow$ $\mathcal{R} = \mathrm{Im}(R_4)$ ha dimensione 2

Il rango di O_4 è 2 (colonna nulla e 4ª colonna = 2ª colonna − 1ª colonna)

queste informazioni sono utili per determinare i vettori di base di $\mathcal{N}(O_4)$ (*)

$$\mathcal{R} = \mathrm{Im}(R_4) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{N}(O_4) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Il $\mathcal{N}(Q_4)$ può essere calcolato anche risolvendo $Q \cdot x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

determino due soluzioni linearmente indipendenti e le scelgo come vettori di base per $\mathcal{N}(Q_4)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

oppure, sfruttando le osservazioni (*) notando che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per qualsiasi scelta $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ per $\alpha = 1$ sono i vettori di base di $\mathcal{I}$.

Dunque $\mathcal{R} = \operatorname{Im}(R_4) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{I} = \mathcal{N}(Q_4) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4 sottospazi della decomposizione strutturale:

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{X}_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{X}_3$: $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{X}_3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\mathcal{X}_4$! $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4 \quad \mathcal{X}_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{bmatrix} y_{lib}(0) \\ \vdots \\ y_{lib}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^3 \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

evoluzione libera nulla $\Leftrightarrow$ $x(0) \in \mathcal{N}(O_4)$ $\quad x(0) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ ad esempio

evoluzione lib $y_{\ell}(t) = 1$ $t = 0, \dots, 3$ per $x(0) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ ad esempio.

<u>Problema 5</u> Dato il sistema non lineare descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1-k)x_1(t) - 2x_2(t) & (= f_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) + (1-k)x_2^3(t) & (= f_2(t)) \end{cases}$$

studiare la stabilità dell'origine.

$(0,0)$ è punto d'equilibrio perché annulla $\begin{matrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{matrix}$

$$J(x)\Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1-k & -2 \\ 3 & 3(1-k)x_2^2 \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1-k & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(J) = \begin{vmatrix} \lambda-(1-k) & 2 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+(k-1)\lambda+6$$

$p(J)$ ha: $\begin{cases} \text{due radici in } \mathbb{C}^- \text{ se e solo se } k-1>0 \quad (k>1) \\ \text{due radici in } \mathbb{C}^+ \text{ se e solo se } k-1<0 \quad (k<1) \\ \text{due radici a parte reale nulla se e solo se } k=1 \end{cases}$

Dunque se $k>1$ x_e è localmente asintoticamente stabile

se $k<1$ x_e è instabile

se $k=1$ non possiamo concludere alcunché $\left(\begin{matrix}\text{CASO}\\ \text{CRITICO}\end{matrix}\right)$

$k=1$ nelle equazioni del sistema:

$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) \end{cases}$ è un sistema lineare e stazionario $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\dot{x}(t) = A\,x(t)$

$\sigma(A) = \{\sqrt{6}\,i, -\sqrt{6}\,i\} \Rightarrow x_e$ è semplicemente stabile per $k=1$.

Alternativamente:

$V(x) = \frac{\alpha}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \qquad \dot{V}(x) = \frac{dV}{dx}\dot{x}(t) = [\alpha x_1 \,\vdots\, x_2]\begin{bmatrix} -2x_2 \\ 3x_1 \end{bmatrix}$

$= -2\alpha x_1x_2 + 3x_1x_2$

per $\alpha = \frac{3}{2}$ $\quad V(x) = \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \Rightarrow \dot{V}(x) = 0 \leq 0$ $\left(\begin{matrix}\text{semidef.}\\ \text{negativa}\end{matrix}\right)$

$\Rightarrow x_e$ semplicemente stabile se $k=1$.