TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 12-9-2022

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = K\frac{s+10}{s\,(s-1)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

Sapendo che un autovalore di A è $\lambda_1 = -4+i$, e che l'autovettore destro a esso associato è $r_1 = \begin{bmatrix}2i\\1\end{bmatrix}$:

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita e la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (4 punti) Dato il sistema a tempo discreto a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento ingresso-uscita

$$W(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

si calcoli il valore della risposta impulsiva al tempo $t=0$. Inoltre, si calcoli la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sqrt{5}\sin(\frac{\pi}{2}t)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà strutturali dei quattro vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = kx_1(t) - \big(x_2(t)-1\big)\\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + k\big(x_2(t)-1\big)^3\end{cases}$$

Dopo aver verificato che $x_e = (0,1)$ è un punto d'equilibrio per il sistema, se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
