TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame dell'1-2-2023

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{4s}{(s+1)(s^2+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali e si calcoli la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
2. si calcolino la risposta impulsiva e funzione di trasferimento ingresso–uscita;
3. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (6 punti) Dato il sistema a tempo continuo a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = e^{-t} + e^{-2t}$$

1. Si calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \sin(t)$;
2. si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(2t + \pi)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si determini uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che l'evoluzione libera dell'uscita del sistema agli istanti $t = 0, 1, 2, 3$ sia $y_{lib}(0) = 0,\ y_{lib}(1) = 1,\ y_{lib}(2) = 2,\ y_{lib}(3) = 2$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1+k)\,x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2\,x_1(t) + (1+k)\,x_2^5(t) \end{cases}$$

Si verifichi che l'origine sia un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza
