TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 15-06-2023

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{50\,(s+1)}{(s+5)(s^2+100)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. Calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$;
3. Calcolare la risposta impulsiva del sistema agli istanti $t = 1$ e $t = 2$ e la funzione di trasferimento ingresso-uscita;

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo continuo a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = e^{-t} + e^{-4t}$$

1. Si calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(t) = e^{2t}$;
2. si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(2t + \pi)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà degli stati $x_a = [0\ \ -1\ \ 1\ \ 1]$ e $x_b = [0\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)\big(k - 1 + x_2(t) - x_1^2(t)\big) \\ \dot{x}_2(t) = 1 - x_2(t) - \dfrac{1}{2}\,x_1^2(t) \end{cases}$$

Dopo aver determinato quale tra $x_a = (1, 0)$ e $x_b = (0, 1)$ sia un punto d'equilibrio per il sistema, se ne discuta la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$, utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov. (*Suggerimenti: si applichi un cambiamento di coordinate al sistema in modo che nelle nuove coordinate il punto di equilibrio sia* $(0, 0)$ *e si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
