TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 16-01-2024

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{100\,(s+1)}{(s^2+100)(s-10)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. si calcolino la la funzione di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$, la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento del sistema;
3. si trovi lo stato iniziale $x(0)$ tale che l'evoluzione libera dell'uscita sia $y(t) = \sin(2t) + \cos(2t)$.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(0) = 0, \quad w(t) = \left(\frac{1}{5}\right)^{t-1}, \quad t > 0,$$

1. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario;
2. si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si forniscano un esempio di stato raggiungibile e osservabile e un esempio di stato non raggiungibile e non osservabile.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\big(x_1(t)-1\big)^3 - 5x_2(t)\big(x_1(t)-1\big) \\ \dot{x}_2(t) = \big(x_1(t)-1\big)^2 - x_2(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (1, 0)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
