TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 13-02-2024

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{5\,(s+4)}{s\,(s+1)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

1. si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At};
2. si discutano le proprietà di stabilità, osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
3. si calcolino la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema;
4. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (4 punti) Dato il sistema a tempo discreto ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(0) = 0, \quad w(t) = 2\left(\frac{1}{5}\right)^{t-1}, \quad t > 0,$$

1. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario;
2. si calcoli, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \frac{1}{10}\sin(\frac{\pi}{2}t)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si determini il numero di modi naturali simultaneamente osservabili ed eccitabili del sistema a partire dalle informazioni ottenute ai punti precedenti.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\,x_1(t) - \big(x_2(t) + 1\big)^2 \\ \dot{x}_2(t) = k\big(x_2(t) + 1\big) + 4\,x_1(t)\big(x_2(t) + 1\big) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (0, -1)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov. Per l'applicazione del metodo di Lyapunov si operi preliminarmente un cambio di coordinate, in modo che nelle nuove coordinate ξ il punto di equilibrio sia $\xi_e = (0, 0)$, e quindi si utilizzi una funzione quadratica.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
