TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 1-7-2024

COMPITO A

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = K\,\frac{250\,(s+1)}{s\,(s-5)\,(s+10)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (8 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso–uscita $W(s)$;
4. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(0) = 0, \quad w(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{t-1}, \quad t > 0$$

si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 5\cos(\pi t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. determinare uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale da produrre evoluzione libera dell'uscita pari a $y_{lib}(t) = -t$, per $t = 0, 1, 2, 3$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2k\big(x_1(t) + 1\big) + x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\,x_2(t)\,\big(x_1(t) + 1\big) - x_2^3(t) \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (-1, 0)$ sia un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 1-7-2024

COMPITO B

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = 125\,K\,\frac{(s+1)}{s\,(s+10)\,(s-5)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (8 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso–uscita $W(s)$;
4. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(0) = 0, \quad w(t) = (0.25)^{t-1}, \quad t > 0$$

si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 10\cos(\pi t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. determinare uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale da produrre evoluzione libera dell'uscita pari a $y_{lib}(t) = t$, per $t = 0, 1, 2, 3$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3k\big(x_1(t) + 1\big) + x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\big(x_1(t) + 1\big)\,x_2(t) - x_2^3(t) \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (-1, 0)$ sia un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 1-7-2024

COMPITO C

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = 500\,K\,\frac{(s+1)}{s\,(s-5)\,(s+10)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (8 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento ingresso–uscita $W(s)$;
4. calcolare la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(0) = 0, \quad w(t) = (0.25)^{t-1}, \quad t > 0$$

si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 20\cos(\pi t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. determinare uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale da produrre evoluzione libera dell'uscita pari a $y_{lib}(t) = 2t$, per $t = 0, 1, 2, 3$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -k\big(x_1(t) + 1\big) + x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\big(x_1(t) + 1\big)\,x_2(t) - x_2^3(t) \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (-1, 0)$ sia un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
