TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 15-7-2024

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = 4K\,\frac{s+10}{(s-1)\,(s^2+2s+4)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

con autovalori $\lambda_1 = 1 + j\sqrt{3}$, $\lambda_2 = 1 - j\sqrt{3}$.
Sapendo che l'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro $l_1^\top$ associati a λ_1 sono:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \qquad l_1^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} \end{bmatrix}$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
3. calcolare la matrice delle risposte impulsive $W(t)$ e la matrice di trasferimento ingresso-uscita $W(z)$.

Problema 3. (5 punti) Si consideri il sistema scalare a tempo continuo descritto da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\alpha\, x(t) + \frac{1}{2}u(t) \\ y(t) &= 4\, x(t) \end{aligned}$$

1. Si discuta l'esistenza della risposta a regime permanente al variare di $\alpha \in (-\infty, +\infty)$;
2. per $\alpha = 1/2$, si calcolino la forzata all'ingresso $u(t) = e^t$, e se essa esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 2\cos(2t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\big(x_1(t) - 10\big)^3 - x_2(t)\big(x_1(t) - 10\big) \\ \dot{x}_2(t) = \big(x_1(t) - 10\big)^2 - x_2(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (10, 0)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 15-7-2024

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = K\,\frac{2\,(s+10)}{(s^2+2s+4)\,(s-1)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

con autovalori $\lambda_1 = 1 + j\sqrt{3}$, $\lambda_2 = 1 - j\sqrt{3}$.
Sapendo che l'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro $l_1^\top$ associati a λ_1 sono:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \qquad l_1^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} \end{bmatrix}$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
3. calcolare la matrice delle risposte impulsive $W(t)$ e la matrice di trasferimento ingresso-uscita $W(z)$.

Problema 3. (5 punti) Si consideri il sistema scalare a tempo continuo descritto da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\alpha}{2}\,x(t) + u(t) \\ y(t) &= 2\,x(t) \end{aligned}$$

1. Si discuta l'esistenza della risposta a regime permanente al variare di $\alpha \in (-\infty, +\infty)$;
2. per $\alpha = -1$, si calcolino la forzata all'ingresso $u(t) = e^t$, e se essa esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(2t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\big(x_1(t)+10\big)^3 - \big(x_1(t)+10\big)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \big(x_1(t)+10\big)^2 - 4\,x_2(t) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (-10, 0)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
