TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 4-9-2024

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = K\,\frac{5\,(s-2)}{s\,(s^2+100)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & {}^{1}\!/_{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali e si calcoli la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
2. si calcolino la risposta impulsiva e funzione di trasferimento ingresso–uscita;
3. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario e, *solo se esiste*, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 2\sin(\pi t)$.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo continuo caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento ingresso–uscita:

$$W(s) = \frac{2}{(s+1)(s+5)},$$

si calcolino la risposta impulsiva $w(t)$, la risposta al gradino unitario e, *solo se esiste*, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(2\,t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\,x_1(t) - \big(2 + x_2(t)\big)^2 \\ \dot{x}_2(t) = k\big(2 + x_2(t)\big) + 4\,x_1(t)\big(2 + x_2(t)\big) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (0, -2)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.