TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 21–1–2025

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = K\frac{2\,(s-5)}{s\,(s^2+2s+1)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\;\; y(t) = Cx(t)$ la cui matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$ è:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{t}+e^{-2t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-2t}\right) \\ \frac{1}{2}\left(e^{t}-e^{-2t}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{t}+e^{-2t}\right) \end{bmatrix}.$$

1. Si verifichi la condizione necessaria su $\Phi(0)$ affinché $\Phi(t)$ sia un'esponenziale di matrice;
2. si determini la matrice A del sistema e se ne calcoli la decomposizione spettrale;
3. sapendo che $B = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ e $C = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$, si calcolino la funzione di trasferimento del sistema e la risposta forzata a $u(t) = \sin(2t)$;
4. si possono determinare le proprietà di eccitabilità e osservabilità dei modi naturali del sistema alla luce dei calcoli svolti nel punto precedente (senza ricorrere alle condizioni basate sugli autovettori)?

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{t-1}, \quad w(0) = 0.$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema e se ne discuta la stabilità;
2. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario;
3. si calcoli la risposta armonica all'ingresso $u(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si classifichino le proprietà strutturali degli stati (vettori) della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \gamma\left(x_1(t)-1\right) - 2\left(x_2(t)+1\right) \\ \dot{x}_2(t) = 3\left(x_1(t)-1\right) + \gamma\left(x_2(t)+1\right)^3. \end{cases}$$

Dopo aver verificato che il punto $(1, -1)$ è un punto d'equilibrio per il sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $\gamma \in (-\infty, +\infty)$, utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto d'equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
