TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 4–2–2025

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = K \frac{5\,(s-50)}{(s+10)\,(s^2+25)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la funzione di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$ e la risposta impulsiva;
3. calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita e la risposta forzata all'ingresso $u(t) = 3^t$;

Problema 3. (4 punti) Dato il sistema a tempo continuo ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = 2e^{-3t}$$

1. Calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = 2e^t$;
2. calcolare, se esiste (giustificare la risposta), la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sqrt{13}\cos(2t+\pi)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si determini uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale da produrre un'evoluzione libera in uscita caratterizzata da $y_{lib}(0) = 1$, $y_{lib}(1) = -1$, $y_{lib}(2) = 0$, $y_{lib}(3) = -1$.

Problema 5. (5 punti) Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\,x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2\,x_2(t) \end{cases}$$

utilizzando il metodo di Lyapunov con $V(x) = x_1^2 + 2\,x_2^2 + \alpha x_1 x_2$.
In particolare:

1. Determinare l'intervallo dei valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ che rendono $V(x)$ definita positiva;
2. determinare un valore di α che consenta di dimostrare la stabilità dell'origine del sistema.

È possibile dedurre la stabilità dell'origine del sistema senza ricorrere al metodo di Lyapunov?

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
