TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 18–2–2025

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = K\frac{18}{(s-1)\,(s+3)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0\end{bmatrix}\quad .$$

1. si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At};
2. si discutano le proprietà di stabilità, osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
3. si calcolino la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema;
4. si calcolino l'evoluzione libera dell'uscita con stato iniziale $x(0) = [1 \quad 1]^\top$ e la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo discreto ad un ingresso e un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}, \quad w(0) = 0.$$

1. Calcolare la risposta forzata al gradino unitario;
2. calcolare, se esiste (giustificare la risposta), la risposta armonica alla sequenza d'ingresso:

$$u(t) = \begin{cases} -1 \text{ per } t \text{ pari}\\ \ \ 1 \text{ per } t \text{ dispari}\end{cases} \qquad \text{per } t \geq 0, \quad u(t) = 0 \text{ per } t \leq 0$$

   opportunamente riscritta in forma armonica.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0\\ -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = kx_1(t) + x_1^3(t)x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) = -2x_1^4(t) + kx_1(t) - x_1^2(t)x_2(t) - x_2(t)\end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (0,0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
