

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 12-6-2025

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = 50 K \frac{s-1}{s^2+25}.$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} -1/3 & -1 \\ 1 & -1/3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. si calcoli la matrice di transizione dello stato e^{At} ;
2. si discutano le proprietà di stabilità, osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
3. si calcolino la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema;
4. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (4 punti) Si consideri un sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$\begin{aligned} w(t) &= (0.1)^{t-1} - (0.5)^{t-1}, \quad t > 0, \\ w(0) &= 0. \end{aligned}$$

1. Calcolare la funzione di trasferimento ingresso-uscita;
2. calcolare, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sqrt{505} \sin(\frac{\pi}{2} t)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà degli stati $x_a = [1 \ 0 \ 2 \ 0]^\top$ e $x_b = [0 \ 1 \ -1 \ 1]^\top$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - (x_2(t) + 2)^2 \\ \dot{x}_2(t) = k(x_2(t) + 2) + 2x_1(t)(x_2(t) + 2) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto d'equilibrio $x_e = (0, -2)$ al variare del parametro $\gamma \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (si utilizzi una funzione quadratica).