TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 26–6–2025

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = 20\,K\frac{s+5}{s\,(s-10)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con autovalori $\lambda_1 = 3 + j\sqrt{3},\ \lambda_2 = 3 - j\sqrt{3}$.

Sapendo che l'autovettore destro r_1 e l'autovettore sinistro l_1 associati a λ_1 sono:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}, \quad l_1^\top = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix}, \quad \text{e ricordando che } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

1. calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
2. verificare (senza ripeterne il calcolo esplicito) che r_1 e $l_1^\top$ siano effettivamente autovettori di A per l'autovalore λ_1;
3. calcolare l'evoluzione libera dell'uscita per uno stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$.
4. calcolare, solo se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(t)$.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema a tempo continuo a un ingresso e una uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = e^{-t} + e^{-2t}$$

1. Si calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(t) = e^{2t}$;
2. si calcoli, solo se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sqrt{\frac{10}{13}}\cos(t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà degli stati $x_a = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 2]^\top$ e $x_b = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 10]^\top$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4\,x_1(t) - 2\,x_1^3(t)\,x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = k\,x_2(t)\,(1 + x_1(t)) - x_2^5(t). \end{cases}$$

Si verifichi che l'origine è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
