TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame del 10–7–2025

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = K\frac{50\,(s-2)}{s^2+2s+100}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K=1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. si calcoli la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. si calcolino la risposta impulsiva e funzione di trasferimento ingresso–uscita;
4. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3. (5 punti) Dato il sistema scalare a tempo discreto descritto da

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \frac{\alpha}{2}x(t) + 2\,u(t)\\ y(t) &= 3\,x(t) + u(t)\end{aligned}$$

si studi la stabilità del sistema al variare del parametro $\alpha \in (-\infty, \infty)$. Per $\alpha = 1$, si calcolino la risposta impulsiva, la funzione di trasferimento ingresso-uscita e, solo se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(\pi t)$.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà degli stati $x_a = [1\ \ 1\ \ -1\ \ 0]^\top$ e $x_b = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 1]^\top$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \left(x_1(t) - \dfrac{1}{2}\right)x_2(t) + k\left(x_1(t) - \dfrac{1}{2}\right) \\ \dot{x}_2(t) = -2\left(x_1(t) - \dfrac{1}{2}\right)^2 - x_2(t). \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (\frac{1}{2}, 0)$ è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
