TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. V. De Iuliis

Compito d'esame del 14–1–2026

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = \frac{K}{5}\frac{(s-50)}{(s^2+1)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (8 punti) Sia dato il sistema lineare e stazionario a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la risposta impulsiva e la risposta forzata al gradino unitario;
3. calcolare, se esiste, la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \sin(2t)$.

Problema 3. (5 punti) Dare la definizione della trasformata $\mathcal{Z}$ di una funzine $f(t)$. A partire dalla formula di trasformazione di una funzione esponenziale $f(t) = a^t$, dimostrare la formula di trasformazione della funzione $f(t) = \sin(\omega t)$, per un generico $\omega \in \mathbb{R}$, e discuterme la regione di convergenza.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si discutano le proprietà strutturali dei quattro vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + k\,x_2(t) + k^2\,x_1^2(t) \end{cases}$$

Si verifichi che l'origine è un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov (*si utilizzi una funzione quadratica*).

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
