TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. V. De Iuliis

Compito d'esame del 28–1–2026

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = \frac{5\,K(s-20)}{s\,(s^2+100)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (8 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Discutere le proprietà dei modi naturali del sistema;
2. calcolare la matrice A e la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = A^t$;
3. calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(z)$;
4. calcolare la risposta al gradino unitario e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \frac{5}{3}\sin(\frac{\pi}{2}t)$.

Problema 3. (5 punti) Quali sono le proprietà dei modi naturali presenti nella risposta impulsiva di un sistema lineare e stazionario? Fornire una giustificazione (dimostrazione) teorica, a tempo continuo o discreto.

Problema 4. (5 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = k\,x_1(t) + x_1^3(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = k\,x_1(t) - 2x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2(t) - x_2(t). \end{cases}$$

Dopo aver verificato che l'origine è un punto d'equilibrio per il sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.