TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Prof. V. De Iuliis

Compito d'esame del 11–2–2026

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K\,\frac{320}{(s-2)(s+10)^2}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
2. si calcoli la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
3. si calcolino la risposta impulsiva e funzione di trasferimento ingresso–uscita;
4. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario.

Problema 3a. (3 punti) Dare la definizione di stati indistinguibili e di stato inosservabile.

Problema 3b. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Determinare uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che l'evoluzione libera dell'uscita agli istanti $t = 0, 1, 2, 3$ sia pari a: $y_l(0) = 1,\ y_l(1) = 1,\ y_l(2) = 0,\ y_l(3) = -1$.

Problema 4. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \big(x_1(t) - 1\big)x_2(t) + k\big(x_1(t) - 1\big) \\ \dot{x}_2(t) = -3\,x_2(t) - \big(x_1(t) - 1\big)^2 \end{cases}$$

Dopo aver verificato che $x_e = (1, 0)$ sia un punto d'equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.