

Corso di Teoria dei Sistemi
Soluzione della Prova d'Esame del 11 Febbraio 2026

Proff. C. Manes, V. De Iuliis

Problema 1. (9 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W(s) = K \frac{320}{(s-2)(s+10)^2}.$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
 2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
 3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.
-

1. Diagrammi di Bode e diagramma polare per $K = 1$

Per tracciare i diagrammi di Bode riscriviamo la funzione di trasferimento nella forma canonica di Bode (o forma delle costanti di tempo) per $K = 1$:

$$W(s) = \frac{320}{(-2) \left(1 - \frac{s}{2}\right) \cdot 100 \left(1 + \frac{s}{10}\right)^2} = \frac{320}{-200 \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)^2} = -\frac{16}{10} \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}$$

Scritta nella variabile $s = j\omega$ la funzione di trasferimento ha il seguente aspetto

$$W(j\omega) = -\frac{16}{10} \frac{1}{\left(1 - j\frac{\omega}{2}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)^2}.$$

Esaminiamo il contributo al diagramma dei moduli e delle fasi di ciascun termine della funzione di trasferimento:

- Per il calcolo del guadagno in bassa frequenza $|W(0)| = 16/10$ (o guadagno statico) in decibel lo si decomponga come segue: $|W(0)| = 2^4/10$, di modo che

$$|W(0)|_{dB} = 20 \log_{10}(2^4/10) = 4 \cdot 20 \log_{10}(2) - 20 \log_{10}(10) \approx 4 \cdot 6 - 20 \text{ dB} = 4 \text{ dB},$$

(è sufficiente ricordare che $20 \log_{10}(2) \approx 6$).

Per il calcolo della fase iniziale, si ricordi che la fase di un numero reale e negativo è π (o, equivalentemente, $-\pi$), da cui $\angle W(0) = \pi \text{ rad}$ (o $\angle W(0) = 180^\circ$, se si preferisce lavorare in gradi).

- Un polo reale positivo in $s = 2$ (polo instabile): termine $(1 - \frac{s}{2})$. Contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di -20 dB/dec dopo la pulsazione di taglio $\omega_1 = 2$ rad/s e una variazione di fase **positiva** (anticipo) di $\pi/2$ su due decadi, con una pendenza di $\pi/4$ rad/dec nell'intervallo $[0.1\omega_1, 10\omega_1] = [0.2, 20]$ rad/s.
- Un polo doppio reale negativo in $s = -10$ (stabile): termine $(1 + \frac{s}{10})^2$. Contribuisce al diagramma dei moduli con una pendenza di -40 dB/dec dopo la pulsazione di taglio $\omega_2 = 10$ rad/s. La variazione di fase va da 0 rad a $-\pi$ rad, con una pendenza di $-\pi/2$ rad/dec nell'intervallo di frequenze $[0.1\omega_2, 10\omega_2] = [1, 100]$ rad/sec.

Andamento del diagramma asintotico delle ampiezze

- $0 < \omega < 2$: asintoto piatto a 4 dB;
- $2 < \omega < 10$: pendenza di -20 dB/dec (azione del polo singolo in $s = 2$);
- $10 < \omega$: pendenza di -60 dB/dec (il polo doppio in $s = -10$ aggiunge la pendenza di -40 dB/dec).

Andamento del diagramma asintotico delle Fasi

- $0 < \omega < 0.2$: la fase parte da $-\pi$ rad;
- $0.2 < \omega < 1$: la fase cresce di $\pi/4$ rad/dec (azione del polo instabile in $s = -2$);
- $1 < \omega < 20$: la fase decresce di $-\pi/4$ rad/dec (per l'azione combinata del polo singolo instabile in $s = 2$ e del polo doppio stabile in $s = -10$);
- $20 < \omega < 100$: la fase decresce di $-\pi/2$ rad/dec (per la sola azione del polo doppio stabile in $s = -10$);
- $100 < \omega$: la fase è arrivata al valore asintotico di $-3\pi/2$ rad
(Calcolo: $-\pi$ valore iniziale, $+\pi/2$ contributo totale del polo in $s = 2$, $-\pi$ contributo totale del polo doppio in $s = -10$: totale $-\pi + \pi/2 - \pi = -3\pi/2$ rad).

Diagramma Polare (Nyquist)

Studiamo il comportamento analitico di $W(j\omega)$ per $K = 1$:

$$W(j\omega) = \frac{320}{(j\omega - 2)(j\omega + 10)^2}$$

- Per $\omega \rightarrow 0^+$: $W(0) = -1.6$. Il diagramma parte dal semiasse reale negativo in $(-1.6, j0)$.
- Per ω crescente il modulo decresce, fino a che per $\omega \rightarrow \infty$: l'ampiezza tende a 0 .
- La fase inizialmente cresce, ma poi, a partire da $\omega = 1$ rad la fase decresce fino a tendere a $-3\pi/2$ (ovvero $+\pi/2$, asse immaginario positivo).

Il diagramma polare pertanto ha due intersezioni con l'asse reale: una in corrispondenza a $\omega = 0$ (il punto di partenza, $W(0) = -1.6 + j0$) e un'altra ad una pulsazione incognita ω^* , in cui $W(j\omega^*) \in (W(0), 0)$.

Per trovare l'intersezione $W(j\omega^*)$ con l'asse reale, imponiamo che la parte immaginaria della $W(j\omega)$ sia nulla.

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{-320}{(2-j\omega)(10+j\omega)^2} = \frac{-320}{(2-j\omega)(10+j\omega)^2} \frac{(2+j\omega)(10-j\omega)^2}{(2+j\omega)(10-j\omega)^2} \\ &= (-320) \frac{(2+j\omega)(100-\omega^2-j20\omega)}{(4+\omega^2)(100+\omega^2)^2} \\ &= (-320) \frac{200-2\omega^2+20\omega^2+j\omega(100-\omega^2-40)}{(4+\omega^2)(100+\omega^2)^2} \\ &= \frac{-320}{(4+\omega^2)(100+\omega^2)^2} (200+18\omega^2+j\omega(60-\omega^2)) \end{aligned}$$

La parte immaginaria si annulla per $\omega = 0$ (e infatti $W(j0)$ è reale) e per

$$60 - \omega^2 = 0 \quad \implies \quad \omega^* = \pm\sqrt{60} \text{ rad.}$$

Il calcolo di $W(j\omega^*)$ fornisce

$$\begin{aligned} W(j\omega^*) &= \frac{-320}{(4+\omega^2)(100+\omega^2)^2} (200+18\omega^2+j\omega(60-\omega^2)) \Big|_{\omega=\sqrt{60}} \\ &= \frac{-320}{(4+60)(100+60)^2} (200+18 \cdot 60) \end{aligned}$$

Con alcune manipolazioni si ha

$$\begin{aligned} W(j\omega^*) &= -\frac{2 \cdot 160}{(64)(160)^2} (2^3 \cdot 5^2 + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5) \\ &= -\frac{1}{32 \cdot 160} (2^3 \cdot 5)(5+3^3) = -\frac{1}{32 \cdot 160} (40)(32) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Quindi, la curva $W(j\omega)$ interseca l'asse reale negativo nel punto $(-0.25, j0)$, alle pulsazioni $\omega^* = \pm\sqrt{60} \approx 7.75$ rad/s.

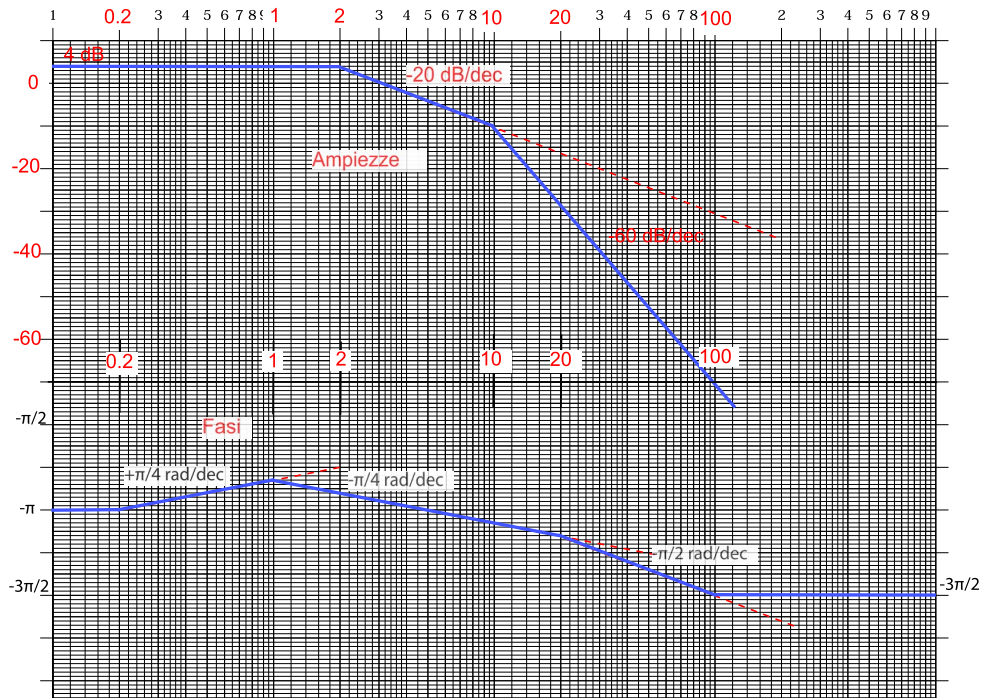


Figura 1: Diagrammi di Bode modulo e fase di $W(j\omega)$.

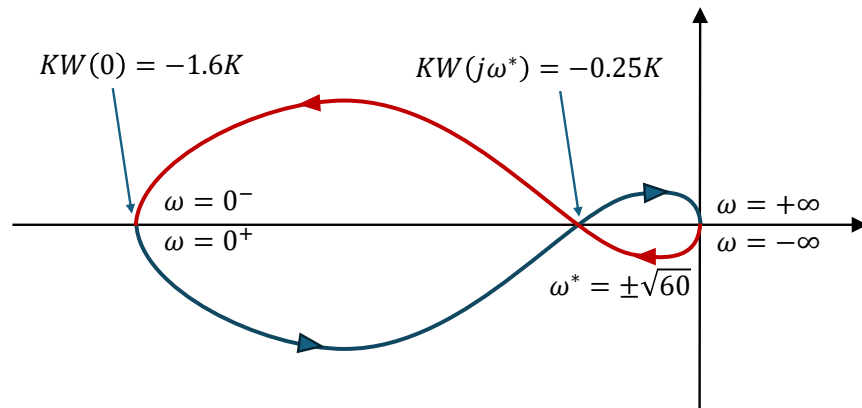


Figura 2: Diagramma polare di $KW(j\omega)$.

2. Denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso

La funzione di trasferimento a ciclo chiuso è data da:

$$W_{ch}(s) = \frac{KW(s)}{1 + KW(s)}$$

Il denominatore è pari a $D_{ch}(s) = \text{Num}(W(s)) \cdot K + \text{Den}(W(s))$. Sviluppiamo il denominatore di catena aperta:

$$(s-2)(s+10)^2 = (s-2)(s^2+20s+100) = s^3+20s^2+100s-2s^2-40s-200 = s^3+18s^2+60s-200$$

Quindi il polinomio caratteristico a ciclo chiuso (denominatore della $W_{ch}(s)$) è:

$$D_{ch}(s) = s^3 + 18s^2 + 60s - 200 + 320K$$

3. Analisi della stabilità al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$

Metodo di Routh-Hurwitz

Costruiamo la tabella di Routh per il polinomio $D_{ch}(s) = s^3 + 18s^2 + 60s + (320K - 200)$:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 60 \\ 2 & 18 & 320K - 200 \\ 1 & c_1 & 0 \\ 0 & 320K - 200 & \end{array}$$

Calcoliamo l'elemento c_1 :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 \\ 18 & 320K - 200 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{1 \cdot (320K - 200) - 18 \cdot 60}{-18} \\ &= \frac{18 \cdot 60 + 200 - 320K}{18} = \frac{40 \cdot 32 - 320K}{18} = \frac{320(4 - K)}{18} \end{aligned}$$

La tabella di Routh può quindi essere riscritta come:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 60 \\ 2 & 18 & 320K - 200 \\ 1 & \frac{320}{18}(4 - K) & 0 \\ 0 & 40(8K - 5) & \end{array}$$

Discutiamo i segni della prima colonna al variare di K :

1. Affinché l'elemento della riga 1 sia positivo ($c_1 > 0$):

$$4 - K > 0 \implies K < 4$$

2. Affinché l'elemento di riga 0 sia positivo ($8K - 5 > 0$):

$$8K > 5 \implies K > \frac{5}{8} = 0.625$$

Riportiamo la tabella con i segni dei termini della prima colonna della tabella di Routh al variare di K , tenendo conto che i valori di K in cui si ha il cambiamento di segno delle ultime due righe sono $K = 5/8$ e $K = 4$:

K	5/8		4
1	+	+	+
18	+	+	+
$4 - K$	+	+	-
$16K - 10$	-	+	+
variazioni	1	0	2

L'ultima riga conta le variazioni di segno dei termini della prima colonna della tabella di Routh in tre intervalli di K :

$$K \in (-\infty, 5/8), \quad K \in (5/8, 4), \quad K \in (4, \infty).$$

Il numero di variazioni di segno è pari al numero di poli a parte reale positiva a ciclo chiuso n_{ch}^+ :

- **Caso** $K < \frac{5}{8}$: La prima colonna ha elementi con segni: $(+, +, +, -)$.
C'è 1 variazione di segno $\implies n_{ch}^+ = 1$ polo instabile;
- **Caso** $\frac{5}{8} < K < 4$: La prima colonna ha elementi con segni: $(+, +, +, +)$.
Nessuna variazione di segno $\implies n_{ch}^+ = 0$ poli instabili (sistema asintoticamente stabile).
- **Caso** $K > 4$: La prima colonna ha elementi con segni: $(+, +, -, +)$.
Ci sono 2 variazioni di segno $\implies n_{ch}^+ = 2$ poli instabili.

Criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist afferma che il numero di poli instabili a ciclo chiuso è dato da

$$n_{ch}^+ = n_{ap}^+ - N,$$

dove n_{ap}^+ è il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a catena aperta, ed N è il numero di giri del diagramma polare di $KW(j\omega)$ attorno al punto critico $(-1, 0)$, contati in modo positivo se in senso antiorario (o, in maniera equivalente, anche il numero di giri del diagramma di $W(j\omega)$ attorno al punto critico $(-1/K, 0)$). Nel nostro esercizio la funzione di trasferimento a catena aperta ha 1 polo a parte reale positiva, in $s = 2$, e pertanto nella formula di Nyquist si ha $n_{ap}^+ = 1$.

Analizziamo la posizione del punto $(-1, 0)$ rispetto alle intersezioni del diagramma polare di $KW(j\omega)$, che interseca l'asse reale in $-1.6K$ per $\omega = 0$ e in $-0.25K$ per $\omega = \sqrt{60}$ (equivalentemente, si può analizzare la posizione del punto $(-1/K, 0)$ rispetto alle intersezione del diagramma polare di $W(j\omega)$ in -1.6 e in -0.25).

- **Per $K < 0$:** Il guadagno è negativo, e il diagramma polare è tutto alla destra dell'asse immaginario (ha sempre parte reale positiva), e pertanto il punto $(-1, 0)$ non viene circondato dal diagramma, e quindi $N = 0$. Avremo quindi $n_{ch}^+ = 1 - 0 = 1$ polo instabile.
- **Per $0 < K < \frac{5}{8}$:** Si ha $-1 < -1.6K$, e quindi il punto critico si trova alla sinistra di $-1.6K$, cosicché il diagramma non lo circonda, e si ha $N = 0$. Quindi, anche in questo caso $n_{ch}^+ = 1 - 0 = 1$ polo instabile.
- **Per $\frac{5}{8} < K < 4$:** Si ha $-1.6K < -1 < -0.25K$. Il punto si trova tra le due intersezioni. Il diagramma circonda il punto una volta in senso antiorario orario ($N = 1$). Quindi $n_{ch}^+ = 1 - 1 = 0$ poli instabili (sistema stabile a ciclo chiuso).
- **Per $K > 4$:** Si ha $-0.25K < -1$. ovvero il punto critico si trova a destra dell'intersezione in $-0.25K$ (ovvero tra $-0.25K$ e 0). La $KW(j\omega)$ compie un giro in senso orario attorno al punto critico ($N = -1$) e quindi $n_{ch}^+ = 1 - (-1) = 2$ poli instabili a ciclo chiuso.

Entrambi i metodi portano perfettamente allo stesso risultato riassunto nella seguente tabella:

Intervallo di K	Numero di poli a parte reale positiva n_{ch}^+
$K < 5/8$	1
$5/8 < K < 4$	0
$K > 4$	2

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0].$$

1. Si discutano le proprietà dei modi naturali;
 2. si calcoli la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$;
 3. si calcolino la risposta impulsiva e funzione di trasferimento ingresso-uscita;
 4. si calcoli la risposta forzata al gradino unitario.
-

Per rispondere ai quesiti 1 e 2 occorre calcolare gli autovalori e autovettori della matrice A , e quindi la sua decomposizione spettrale. In realtà, il calcolo dell'esponenziale e^{At} può anche essere svolto nel dominio di Laplace, ma poiché il testo richiede anche di discutere le proprietà dei modi naturali (stabilità, eccitabilità e osservabilità), è comunque richiesto il calcolo della decomposizione spettrale della matrice A , da cui è immediato il calcolo di e^{At} .

Il calcolo degli autovalori e autovettori della matrice A

Gli autovalori si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica $\det(\lambda I - A) = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -16 & \lambda \end{bmatrix} \\ \det(\lambda I - A) &= \lambda^2 - (1 \cdot (-16)) = \lambda^2 + 16 = 0 \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado, si ottengono due autovalori complessi coniugati:

$$\lambda_1 = 4j, \quad \lambda_2 = -4j$$

Poiché la parte reale degli autovalori è zero, e gli autovalori sono semplici (molteplicità 1), i modi naturali associati sono semplicemente stabili. Le leggi di moto associate sono del tipo $\cos(4t)$ e $\sin(4t)$: si tratta quindi di oscillazioni persistenti e non smorzate.

Calcolo degli Autovettori destri e sinistri

Gli autovettori destri r_1 e r_2 si calcolano risolvendo il sistema omogeneo $(\lambda_i I - A)r_i = 0$. In realtà è sufficiente risolvere il problema per r_1 , in quanto r_2 è il coniugato di r_1 . Gli autovettori sinistri ℓ_1 e ℓ_2 si calcolano risolvendo il sistema omogeneo $\ell_i^\top (\lambda_i I - A) = 0$. Analogamente, una volta calcolato ℓ_1 l'autovettore ℓ_2 si calcola per coniugazione di ℓ_1 .

Per $\lambda_1 = 4j$:

$$\begin{bmatrix} 4j & 1 \\ -16 & 4j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies 4jr_{11} + r_{12} = 0 \implies r_{12} = -4jr_{11}$$

Scegliendo liberamente $r_{11} = 1$, otteniamo il primo autovettore destro, e per coniugazione il secondo

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4j \end{bmatrix}, \quad r_2 = r_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 4j \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora un possibile candidato per l'autovettore sinistro ℓ_1 , che chiameremo $\tilde{\ell}_1$, che successivamente normalizzeremo per garantire l'identità $\ell_1^\top r_1 = 1$.

$$[\tilde{\ell}_{11} \quad \tilde{\ell}_{12}] \begin{bmatrix} 4j & 1 \\ -16 & 4j \end{bmatrix} = [0 \quad 0] \implies 4j\tilde{\ell}_{11} - 16\tilde{\ell}_{12} = 0 \implies \tilde{\ell}_{12} = \frac{4j}{16}\tilde{\ell}_{11}$$

Scegliendo arbitrariamente $\tilde{\ell}_{11} = 4$ si ha $\tilde{\ell}_{12} = j$, e quindi

$$\tilde{\ell}_1^\top = [4 \quad j],$$

Poiché il prodotto $\tilde{\ell}_1^\top r_1 = [4 \quad j] \begin{bmatrix} 1 \\ -4j \end{bmatrix} = 8 \neq 1$, l'autovettore sinistro va normalizzato, per l'appunto dividendolo per $(\tilde{\ell}_1^\top r_1)$:

$$\ell_1^\top = \frac{1}{(\tilde{\ell}_1^\top r_1)} \tilde{\ell}_1^\top = \frac{1}{8} [4 \quad j], \quad \text{da cui} \quad \ell_2^\top = (\ell_1^*)^\top = \frac{1}{8} [4 \quad -j]$$

Riportiamo di seguito la matrice R di autovettori destri e la matrice L di autovettori sinistri:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4j & 4j \end{bmatrix}, \quad L = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & j \\ 4 & -j \end{bmatrix}$$

Si può verificare che $LR = I_2$.

1. Le proprietà dei modi naturali

Eccitabilità e Osservabilità

Come già detto precedentemente, poiché gli autovalori hanno parte reale nulla, il modo naturale associato alla coppia $\lambda_{1,2} = \pm j4$ è semplicemente stabile, con leggi di moto del tipo $\cos(4t)$ e $\sin(4t)$.

Eccitabilità e Osservabilità

L'eccitabilità e l'osservabilità dei singoli modi naturali (λ_1 e λ_2) possono essere verificate analizzando i prodotti $\ell_i^\top B$ (eccitabilità dall'ingresso) e Cr_i (osservabilità dall'uscita). In particolare, il modo naturale associato a λ_i è eccitabile dall'ingresso se $\ell_i^\top B \neq 0$ (coefficiente di ingresso modale è non nullo). Nell'esercizio si ha

$$\ell_1^\top B = \frac{1}{8} [4 \quad j] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0 \implies \text{il modo associato a } \lambda_1 = 4j \text{ è eccitabile.}$$

Poiché $\ell_2^\top B = (\ell_1^\top B)^*$, chiaramente anche il modo associato a $\lambda_2 = -4j$ è eccitabile.

Siccome ad una coppia di autovalori complessi coniugati è associato un solo modo naturale (in questo caso oscillante e persistente) in realtà è più corretto dire che il modo naturale associato alla coppia di autovalori $\lambda_{1,2} = \pm j4$ è eccitabile dall'ingresso.

Il modo naturale associato all'autovalore λ_i è osservabile dall'uscita se $Cr_i \neq 0$ (il coefficiente di uscita modale è non nullo). Nell'esercizio considerato si ha

$$Cr_1 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -4j \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Il modo associato alla coppia } \lambda_{1,2} = \pm j4 \text{ è osservabile.}$$

$$Cr_2 = (Cr_1)^* = 1 \neq 0$$

2. calcolo dell'esponenziale e^{At} mediante decomposizione spettrale

Anche se il problema non lo richiede, per esercizio scriviamo preliminarmente la decomposizione spettrale della matrice A . Si può verificare la seguente identità:

$$A = \lambda_1 r_1 \ell_1^\top + \lambda_2 r_2 \ell_2^\top = 2\text{Re}(e^{\lambda_1 t} r_1 \ell_1^\top)$$

tenendo conto che

$$\lambda_1 r_1 \ell_1^\top = j4 \begin{bmatrix} 1 \\ -4j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & j \end{bmatrix} \frac{1}{8} = j \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & j \\ -16j & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4j & -1 \\ 16 & 4j \end{bmatrix},$$

da cui è immediato verificare che $2\text{Re}(e^{\lambda_1 t} r_1 \ell_1^\top)$ restituisce la matrice A del problema.

L'esponenziale e^{At} si calcola dalla decomposizione spettrale:

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} r_1 \ell_1^\top + e^{\lambda_2 t} r_2 \ell_2^\top = 2\text{Re}(e^{\lambda_1 t} r_1 \ell_1^\top)$$

tenendo conto che

$$e^{\lambda_1 t} r_1 \ell_1^\top = e^{j4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -4j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & j \end{bmatrix} \frac{1}{8} = \frac{1}{8} (\cos(4t) + j \sin(4t)) \begin{bmatrix} 4 & j \\ -16j & 4 \end{bmatrix}$$

da cui

$$2\text{Re}(e^{\lambda_1 t} r_1 \ell_1^\top) = \frac{1}{4} \left(\cos(4t) \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + j \sin(4t) \begin{bmatrix} 0 & j \\ -16j & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \left(\cos(4t) \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \sin(4t) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

In sintesi:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & -\frac{1}{4} \sin(4t) \\ 4 \sin(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}.$$

Per verificare la correttezza di questo risultato, oltre alla verifica banale che per $t = 0$ l'esponenziale e^{At} restituisca la matrice identità, si può verificare facilmente che

$$\left. \frac{d}{dt} e^{At} \right|_{t=0} = A.$$

A titolo di esercizio, di seguito si riporta il calcolo della matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$ utilizzando la trasformata di Laplace, ricordando che

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \Phi(t).$$

Possiamo quindi calcolare la matrice di transizione tramite l'antitrasformata di Laplace di $(sI - A)^{-1}$. Il calcolo della matrice $(sI - A)^{-1}$ è il seguente:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -16 & s \end{bmatrix} \implies (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 16} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 16 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+16} & \frac{-1}{s^2+16} \\ \frac{16}{s^2+16} & \frac{s}{s^2+16} \end{bmatrix}.$$

Possiamo antitrasformare termine a termine la matrice $(sI - A)^{-1}$, ricordando che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = \cos(\omega t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = \sin(\omega t)$. A tale scopo la riscriviamo come segue:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+16} & -\frac{1}{4} \frac{4}{s^2+16} \\ 4 \frac{4}{s^2+16} & \frac{s}{s^2+16} \end{bmatrix}$$

in modo da ottenere immediatamente

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}((sI - A)^{-1}) = \begin{bmatrix} \cos(4t) & -\frac{1}{4} \sin(4t) \\ 4 \sin(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}$$

che chiaramente coincide con il risultato ottenuto mediante la decomposizione spettrale.

3. Il calcolo della risposta impulsiva e della funzione di trasferimento ingresso-uscita

Per rispondere a questo quesito si può procedere in diversi modi. Si può procedere a calcolare per prima la risposta impulsiva $w(t)$ nel dominio del tempo, e successivamente la funzione di trasferimento $W(s)$ tramite trasformata: $W(s) = \mathcal{L}(w(t))$. In alternativa si può calcolare preliminarmente la funzione di trasferimento $W(s)$ nel dominio di Laplace e successivamente la risposta impulsiva $w(t)$ tramite antitrasformata: $w(t) = \mathcal{L}^{-1}(W(s))$.

Il calcolo della $w(t)$ per un sistema lineare stazionario è il seguente:

$$w(t) = Ce^{At}B + D\delta(t),$$

ed è molto facile se si dispone già dell'esponenziale e^{At} . Essendo $D = 0$ nel problema in esame si ha:

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(4t) & -\frac{1}{4}\sin(4t) \\ 4\sin(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(4t) \\ 4\sin(4t) \end{bmatrix} = \cos(4t)$$

La funzione di trasferimento $W(s)$ è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva:

$$W(s) = \mathcal{L}\{\cos(4t)\} = \frac{s}{s^2 + 16}$$

Se si dispone della trasformata di e^{At} , ovvero $(sI - A)^{-1}$, il calcolo della $W(s)$ è il seguente

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+16} & \frac{-1}{s^2+16} \\ \frac{16}{s^2+16} & \frac{s}{s^2+16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = \frac{s}{s^2 + 16}$$

4. Il calcolo della risposta forzata al gradino unitario

L'ingresso è un gradino unitario $u(t) = \delta_{-1}(t)$ (notazione alternativa, $u(t) = \eta(t)$), la cui trasformata è $U(s) = \frac{1}{s}$. La trasformata di Laplace della risposta forzata $Y(s)$ è:

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{s}{s^2 + 16} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 + 16}$$

L'antitrasformata è evidente se moltiplichiamo e dividiamo per 4:

$$Y_f(s) = \frac{1}{4} \frac{4}{s^2 + 16}$$

Antitrasformando nel dominio del tempo otteniamo la risposta forzata:

$$y(t) = \frac{1}{4} \sin(4t) \cdot \delta_{-1}(t).$$

Problema 3a. (3 punti) Dare la definizione di stati indistinguibili e di stato inosservabile.

Stati indistinguibili: In un sistema generico due stati x_A e x_B appartenenti allo spazio degli stati $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ si dicono indistinguibili se a partire, in qualunque istante t_0 , da ciascuno di essi (ovvero, se utilizzati come stato iniziale del sistema all'istante t_0), qualunque sia l'ingresso $u(t)$ applicato al sistema l'uscita prodotta è la stessa per $t \geq t_0$.

In formule, considerata la funzione $\psi(\cdot)$ che calcola l'uscita del sistema a partire dalla coppia stato iniziale/ingresso, e definendo le uscite $y_A(t)$ e $y_B(t)$

$$y_A(t) = \psi(t, t_0, x_A, u), \quad y_B(t) = \psi(t, t_0, x_B, u)$$

i due stati x_A e x_B si dicono indistinguibili se

$$y_A(t) = y_B(t), \quad \forall (t, t_0) \in T \times T, \text{ con } t \geq t_0, \text{ e } \forall u \in \mathcal{U},$$

dove T è l'insieme dei tempi (continuo o discreto) e \mathcal{U} l'insieme delle funzioni di ingresso.

Per sistemi lineari, l'indistinguibilità non dipende dall'ingresso ed equivale a dire che la risposta libera dell'uscita a partire dai due possibili stati iniziali x_A e x_B è la stessa. In formule, nel caso di sistemi lineari e stazionari si ha che x_A e x_B sono indistinguibile se

$$\text{a tempo discreto: } CA^{k-k_0}x_A = CA^{k-k_0}x_B, \quad \forall (k, k_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \text{ con } k \geq k_0$$

$$\text{a tempo continuo: } Ce^{A(t-t_0)}x_A = Ce^{A(t-t_0)}x_B, \quad \forall (t, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \text{ con } t \geq t_0.$$

Poiché i sistemi sono stazionari, l'istante iniziale può essere preso pari a 0, semplificando le espressioni. Equivalentemente, si può dire che due stati x_A e x_B sono indistinguibili se la differenza tra le evoluzioni libere delle uscite che si hanno a partire dai due stati è identicamente pari a zero, ovvero:

$$\text{a tempo discreto: } CA^k(x_A - x_B) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

$$\text{a tempo continuo: } Ce^{At}(x_A - x_B) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

(\mathbb{Z}_+ indica l'insieme degli interi non negativi, e \mathbb{R}_+ indica la semiretta reale non negativa).

Stato inosservabile: Per i sistemi lineari uno stato $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si definisce inosservabile se è indistinguibile dallo stato nullo $x = 0$. Ciò implica che l'evoluzione libera dell'uscita generata partendo da $x(t_0) = \bar{x}$ con ingresso nullo è identicamente zero per tutto l'intervallo di tempo. Nei sistemi lineari e stazionari, senza perdita di generalità si può sempre considerare l'istante iniziale $t_0 = 0$. Pertanto, \bar{x} è inosservabile se

$$\text{a tempo discreto: } CA^k\bar{x} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

$$\text{a tempo continuo: } Ce^{At}\bar{x} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Problema 3b. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\
 y(t) &= Cx(t),
 \end{aligned}
 \quad \text{dove} \quad
 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
 \quad C = [0 \ 0 \ 0 \ 1].$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
 2. si individuino i 4 sottospazi \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , \mathcal{X}_3 e \mathcal{X}_4 della decomposizione strutturale di Kalman;
 3. Determinare uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che l'evoluzione libera dell'uscita agli istanti $t = 0, 1, 2, 3$ sia pari a: $y_l(0) = 1$, $y_l(1) = 1$, $y_l(2) = 0$, $y_l(3) = -1$.
-

1. Basi per lo spazio degli stati raggiungibili e inosservabili

Spazio Raggiungibile \mathcal{R}

Lo spazio dei vettori raggiungibili è l'immagine della matrice di raggiungibilità \mathcal{P}_4 :

$$\mathcal{P}_4 = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$$

Calcoliamo le colonne iterativamente:

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 A^2B &= A(AB) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Poiché $A^2B = \mathbf{0}$, anche le successive potenze saranno nulle ($A^3B = \mathbf{0}$). La matrice di raggiungibilità assume la forma:

$$\mathcal{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le prime due colonne sono linearmente indipendenti e determinano una possibile base di \mathcal{R} , che pertanto ha dimensione 2. La base si può semplificare cambiando il segno della seconda colonna di \mathcal{P}_4 . Si ha quindi

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Spazio Inosservabile \mathcal{Q}

Lo spazio dei vettori inosservabili coincide con il nucleo (Nullspace o Kernel) della matrice di osservabilità \mathcal{O}_4 :

$$\mathcal{O}_4 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo le righe:

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$CA = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

$$CA^2 = (CA)A = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$CA^3 = (CA^2)A = [-1 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ -1 \ 0]$$

La matrice di osservabilità completa è:

$$\mathcal{O}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le prime tre righe di \mathcal{O}_4 sono linearmente indipendenti (facile verificare che la sottomatrice costituita dalle prime tre righe e ultime 3 colonne è non singolare), mentre la quarta riga è linearmente dipendente dalla seconda ($CA^3 = -CA$). Pertanto la matrice ha rango 3, e la dimensione del kernel è $4 - 3 = 1$. Una base del kernel si trova risolvendo $\mathcal{O}_4 x = 0$:

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 \end{cases}$$

Posto $x_2 = 1$, si ottiene $x_1 = 1$. (Equivalentemente, il vettore nel nullo si sarebbe potuto individuare immediatamente considerando che la somma della prima e della seconda colonna di \mathcal{O}_4 dà luogo ad una colonna di zeri.) Lo spazio \mathcal{Q} è quindi generato dalla base:

$$\mathcal{Q} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. I 4 sottospazi della decomposizione strutturale di Kalman

I quattro sottospazi fondamentali della decomposizione strutturale si definiscono a partire dalle intersezioni e somme degli spazi \mathcal{R} e \mathcal{Q} :

- $\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{Q}$: Raggiungibile e Inosservabile. Notiamo che il vettore della base di \mathcal{Q} ossia $[1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ fa parte anche della base di \mathcal{R} . Di conseguenza:

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{Q} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

- \mathcal{X}_2 : Raggiungibile e Osservabile. Tale sottospazio completa \mathcal{X}_1 rispetto a \mathcal{R} ($\mathcal{R} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$).

Dato che $\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, possiamo scegliere il primo vettore come base per \mathcal{X}_2 :

$$\mathcal{X}_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- \mathcal{X}_3 : Non Raggiungibile e Inosservabile. Completa \mathcal{X}_1 rispetto a \mathcal{Q} ($\mathcal{Q} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3$). Essendo $\mathcal{X}_1 = \mathcal{Q}$, non ci sono ulteriori vettori inosservabili che non siano raggiungibili. Pertanto la sua dimensione è zero:

$$\mathcal{X}_3 = \{\mathbf{0}\}$$

- \mathcal{X}_4 : Non Raggiungibile e Osservabile. Completa lo spazio totale $\mathbb{R}^4 = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4$. Al momento abbiamo 2 vettori indipendenti forniti dall'unione di \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 . Mancano due vettori per completare la base di \mathbb{R}^4 . Possiamo selezionare opportunamente due vettori canonici, ad esempio e_1 (o e_2) ed e_3 . Scegliamo:

$$\mathcal{X}_4 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Per essere sicuri che i vettori scelti costituiscano una base per \mathbb{R}^4 , occorre verificare che la matrice T che raccoglie tutti i vettori come colonne è non singolare. Una permutazione dell'ordine aiuta a verificare la nonsingularità:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{da cui, riordinando le colonne} \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si vede chiaramente che il determinante di \tilde{T} (matrice triangolare superiore) è pari a 1.

3. Determinazione dello stato iniziale $x(0)$

L'evoluzione libera dell'uscita per un sistema a tempo discreto è pari a

$$y(k) = CA^k x(0), \quad k \geq 0.$$

Dalle definizioni delle righe della matrice di osservabilità, possiamo scrivere direttamente il sistema per i primi 4 istanti di tempo ($k = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} x(0) = \mathcal{O}_4 x(0)$$

Sostituendo i valori forniti dal problema:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} \quad (1)$$

RisolviAMO riga per riga:

1. Dalla prima riga: $x_4(0) = 1$
2. Dalla seconda riga: $x_3(0) = 1$
3. Dalla terza riga: $-x_1(0) + x_2(0) = 0 \implies x_1(0) = x_2(0)$
4. Dalla quarta riga: $-x_3(0) = -1 \implies x_3(0) = 1$ (consistente con la seconda equazione).

Poiché $x_1(0)$ e $x_2(0)$ devono solo soddisfare la relazione $x_1(0) = x_2(0)$, possiamo scegliere un valore arbitrario (parametro libero $\alpha \in \mathbb{R}$), legato proprio alla presenza dello spazio inosservabile. Scegliendo per comodità $\alpha = 0$, uno stato iniziale valido è:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In alternativa, la soluzione si sarebbe potuta trovare immediatamente osservando che il termine noto dell'equazione (1) è un vettore che si ottiene immediatamente come somma della terza e quarta colonna della matrice di osservabilità.

Problema 4. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (x_1(t) - 1)x_2(t) + k(x_1(t) - 1) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_2(t) - (x_1(t) - 1)^2 \end{cases}$$

Dopo aver verificato che $x_e = (1, 0)$ sia un punto d'equilibrio del sistema, se ne studi la stabilità al variare del parametro $k \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio ed eventualmente il metodo di Lyapunov.

Verifica del Punto di Equilibrio

Un punto $x_e = (x_{1e}, x_{2e})$ è di equilibrio se annulla contemporaneamente le derivate temporali dello stato, ovvero se $f(x_e) = 0$. Sostituendo $x_{1e} = 1$ e $x_{2e} = 0$ nel sistema, otteniamo:

$$\begin{cases} (1 - 1) \cdot 0 + k(1 - 1) = 0 + 0 = 0 \\ -3 \cdot 0 - (1 - 1)^2 = 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

Entrambe le equazioni sono verificate, pertanto $x_e = (1, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema, indipendentemente dal valore del parametro k .

Metodo della Linearizzazione Locale

Per studiare la stabilità nell'intorno di x_e , calcoliamo la matrice Jacobiana $A(x) = \frac{df}{dx}$ del sistema, valutata nel punto di equilibrio:

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + k & x_1 - 1 \\ -2(x_1 - 1) & -3 \end{bmatrix}$$

Valutando la matrice in $x_e = (1, 0)$, otteniamo la matrice del sistema linearizzato A_e :

$$A_e = A(x_e) = \begin{bmatrix} 0 + k & 1 - 1 \\ -2(1 - 1) & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La matrice A_e è diagonale, quindi i suoi autovalori sono immediatamente visibili sulla diagonale principale:

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = -3$$

Applicando il criterio di linearizzazione (o primo metodo di Lyapunov), possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- **Se $k > 0$:** L'autovalore λ_1 ha parte reale positiva ($\text{Re}\{\lambda_1\} > 0$). Il punto di equilibrio è **instabile**.
- **Se $k < 0$:** Entrambi gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa ($\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = -3 < 0$). Il punto di equilibrio è **localmente asintoticamente stabile**.

- **Se $k = 0$:** Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3$. Ci troviamo in un **caso critico** (un autovalore a parte reale nulla e gli altri a parte reale negativa). La linearizzazione non fornisce informazioni sulla stabilità del sistema non lineare. È necessario ricorrere al metodo diretto di Lyapunov (o secondo metodo di Lyapunov).

Studio del Caso Critico ($k = 0$) tramite il metodo diretto di Lyapunov

Per $k = 0$, il sistema non lineare originale si riduce a:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - 1)x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 - (x_1 - 1)^2 \end{cases}$$

Per facilitare lo studio, effettuiamo un cambio di coordinate che trasla l'equilibrio nell'origine. Definiamo le nuove variabili di stato $z_1 = x_1 - 1$ e $z_2 = x_2$. Nelle coordinate $z = (z_1, z_2)$, il punto di equilibrio diventa $z_e = (0, 0)$ e la dinamica si scrive come:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1 z_2 \\ \dot{z}_2 = -3z_2 - z_1^2 \end{cases}$$

Proponiamo una funzione candidata di Lyapunov definita positiva nell'intorno dell'origine. Scegliamo una forma quadratica dipendente da un parametro $\alpha > 0$ da determinare:

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{\alpha}{2}z_2^2$$

Tale funzione è chiaramente nulla nell'origine ($V(0, 0) = 0$) e strettamente positiva per ogni $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$. Inoltre è radialmente illimitata.

Calcoliamo la derivata temporale di $V(z)$ lungo le traiettorie del sistema ($\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial V}{\partial z_2} \dot{z}_2$):

$$\dot{V}(z_1, z_2) = z_1(z_1 z_2) + \alpha z_2(-3z_2 - z_1^2)$$

$$\dot{V}(z_1, z_2) = (1 - \alpha)z_1^2 z_2 - \alpha 3z_2^2.$$

Per eliminare il termine $z_1^2 z_2$, che ha il segno indefinito, è sufficiente porre $\alpha = 1$, ottenendo:

$$\dot{V}(z_1, z_2) = -3z_2^2$$

La derivata prima $\dot{V}(z)$ è **semidefinita negativa** ($\dot{V} \leq 0$), poiché non dipende da z_1 . Da questo possiamo immediatamente dedurre, per il teorema fondamentale di Lyapunov, che l'origine (e quindi x_e) è **semplicemente stabile**.

Riassumendo, l'analisi della stabilità del punto di equilibrio $x_e = (1, 0)$ al variare di k mostra che:

Intervallo del parametro k	Profilo di Stabilità dell'equilibrio x_e
$k > 0$	Instabile
$k < 0$	Localmente asintoticamente stabile
$k = 0$	Semplicemente stabile

EXTRA

Questa parte richiede la conoscenza del principio di Invarianza di LaSalle, che non fa parte del programma standard di Teoria dei Sistemi.

L'utilizzo del metodo diretto di Lyapunov certifica che il punto di equilibrio è *almeno* stabile semplicemente, ma non esclude la stabilità asintotica.

In effetti, la stabilità asintotica può essere verificata ricorrendo al Principio di Invarianza di LaSalle (non svolto nel programma standard di Teoria dei Sistemi).

Asintotica stabilità tramite il Principio di Invarianza di LaSalle

Per verificare se il punto sia in realtà asintoticamente stabile, applichiamo il principio di LaSalle (o teorema di Krasovskii-LaSalle). Cerchiamo l'insieme dei punti in cui la derivata è nulla:

$$E = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(z) = 0\} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : z_2 = 0\}$$

L'insieme E coincide con l'asse delle ascisse z_1 . Determiniamo ora il **massimo insieme invariante** M contenuto in E . Affinché una traiettoria rimanga confinata in E per tutti i tempi, la coordinata $z_2(t)$ deve rimanere costantemente nulla ($z_2 = 0 \implies \dot{z}_2 = 0$).

Sostituendo la condizione $z_2 = 0$ nella seconda equazione del sistema statale:

$$\dot{z}_2 = -3(0) - z_1^2 = 0 \implies z_1 = 0$$

L'unica traiettoria che può rimanere indefinitamente all'interno di E è il punto singolo $(z_1, z_2) = (0, 0)$. Di conseguenza, l'intervallo invariante massimo è ridotto al solo punto di equilibrio:

$$M = \{(0, 0)\}$$

Poiché l'unico sottoinsieme invariante è l'origine stessa, per il teorema di LaSalle l'origine è **asintoticamente stabile**. La stabilità asintotica è globale in quanto la funzione di Lyapunov è radialmente illimitata.

Conclusioni Riassuntive - estese: L'analisi della stabilità del punto di equilibrio $x_e = (1, 0)$ al variare di k mostra che:

Intervallo del parametro k	Profilo di Stabilità dell'equilibrio x_e
$k > 0$	Instabile
$k < 0$	Localmente asintoticamente stabile
$k = 0$	Globalmente asintoticamente stabile