

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 17-06-2026

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = \frac{K(s-8)}{s(s+0.5)}$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$
2. Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (5 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1].$$

1. Scrivere la decomposizione spettrale della matrice A e discutere le proprietà dei modi naturali
2. Calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$
3. Calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$
4. Calcolare la risposta forzata dello stato al gradino unitario

Problema 3 (6 punti)

Quesito 3a: A partire dalla trasformata zeta della funzione esponenziale, a^t , si calcoli la trasformata zeta della funzione $u(t) = \cos(\omega t)$.

Quesito 3b: Dato il seguente sistema a tempo discreto, con $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ scalari,

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + u(t), \\ y(t) &= 3x(t), \end{aligned}$$

Se ne calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \cos((\pi/2)t)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad -1]$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , \mathcal{X}_3 e \mathcal{X}_4 della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = 0$, $y(1) = -3$, $y(2) = 3$, $y(3) = -3$.
4. Spiegare in breve perché nella costruzione della matrice di osservabilità ci si ferma all'ultimo blocco riga, pari a CA^{n-1} (dove n è l'ordine del sistema), e non si prosegue aggiungendo il blocco CA^n .

Problema 5. (6 punti) Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - (2k-1)x_1(t)x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (1-k)x_2(t) - 2k(2x_1(t) + x_2^3(t)) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, usando il secondo metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione quadratica.