Bozza Soluzioni compito Teoria dei Sistemi del 17-06-2026

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = \frac{K(s-8)}{s(s+0.5)}$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$
2. Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

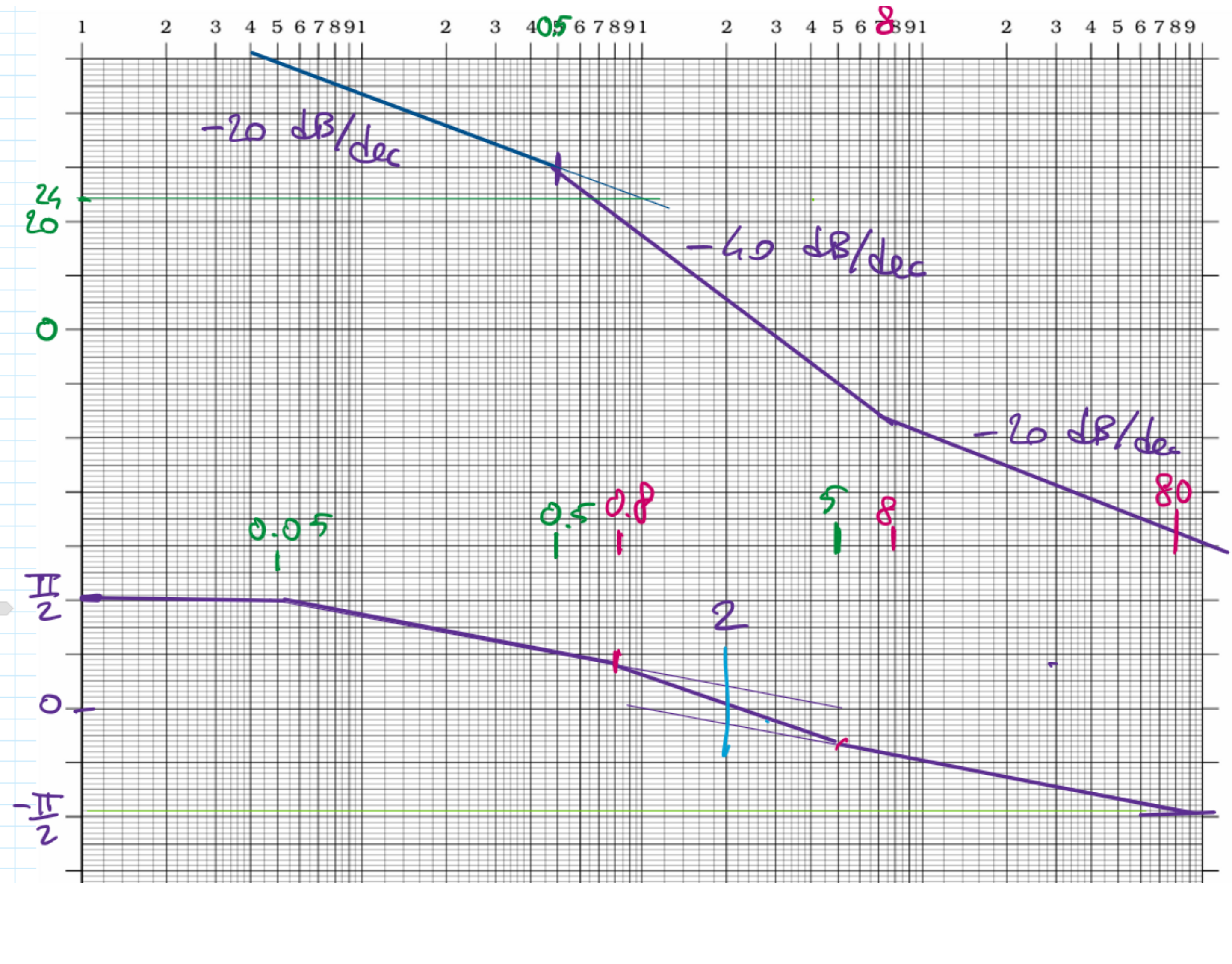
FORMA DI BODE

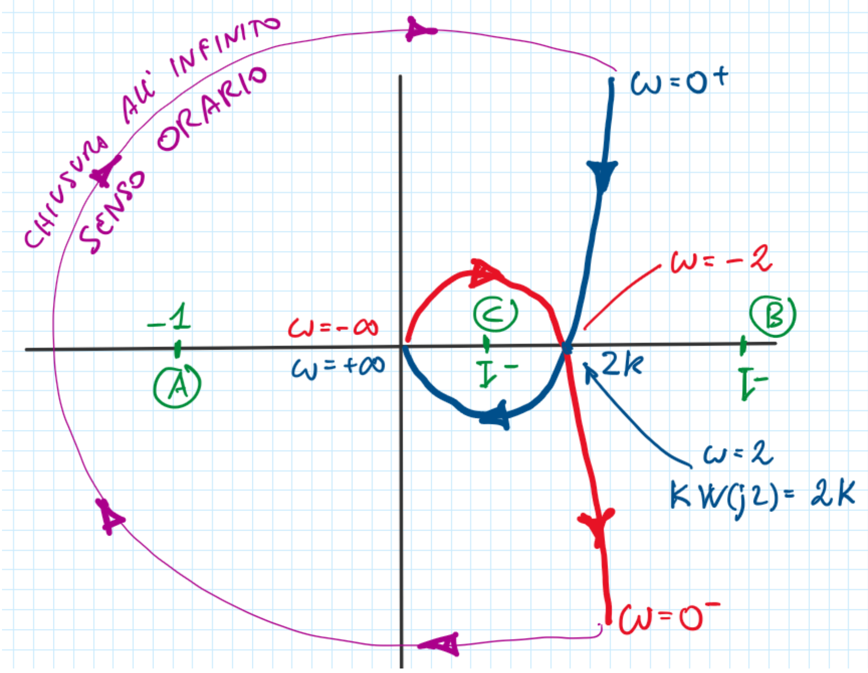
$$W(j\omega) = K \cdot \frac{-8}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 - j\frac{\omega}{8}}{j\omega(1 + j2\omega)} = K(-16) \cdot \frac{1 - j\frac{\omega}{8}}{j\omega\left(1 + j\frac{\omega}{0.5}\right)}$$

$|16|_{dB} = 24\ dB$

GUADAGNO STATICO: $|16|_{dB} = 24\ dB$

$\left(|16|_{dB} = |2^4|_{dB} = 4 \times |2|_{dB} = 4 \cdot 6\ dB = 24\ dB \right)$





Calcolo dell' intersezione con l'asse reale

$$W(s) = \frac{s-8}{s(s+0.5)} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{j\omega-8}{j\omega(j\omega+0.5)} = \frac{-j(j\omega-8)(0.5-j\omega)}{\omega(\omega^2+0.5^2)}$$

$\underline{k=1}$

$$W(j\omega) = \frac{(\omega+j8)(0.5-j\omega)}{\omega(\omega^2+0.5^2)} = \frac{\cancel{\omega}(0.5+8)}{\cancel{\omega}(\omega^2+0.5^2)} + j\frac{(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+0.5^2)}$$

$Re(W(j\omega))=0 \Rightarrow 4-\omega^2=0 \Rightarrow \omega^* = \pm 2$ rad/s

$$W(j2) = \left.\frac{\cancel{\omega}(0.5+8)}{\cancel{\omega}(\omega^2+0.5^2)}\right|_{\omega=2} = \frac{8+\frac{1}{2}}{4+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{4}} = 2 \Rightarrow \boxed{W(j2)=2} \text{ per } k=1$$

Oppure

$$W(j2) = k\frac{s-8}{s(s+0.5)} = k\left.\frac{j2-8}{j2(j2+0.5)}\right|_{j\omega} = k\frac{2(j-4)}{j(j4+1)} = 2k\frac{(j-4)}{(-4+j)} = 2k$$

Ⓐ $k>0 \quad \hat{N}=-1 \quad M^+_{CH} = \overset{0}{M^+_{AP}} - \hat{N} = 1$ Instabile

Ⓑ $k<0, \; -1<2k \Rightarrow k\in(-\frac{1}{2},0) \quad \hat{N}=0$ A.S.

Ⓒ $k<0, \; 2k<-1 \quad k\in(-\infty,-\frac{1}{2}) \quad \hat{N}=-2$ Instab.

$$P_{CH}(s) = s(s+0.5)+k(s-8) = s^2+(k+0.5)s-k8$$

	-0.5	0	k
1	+	+	+
k+0.5	−	+	+
−k8	+	+	−
Var	2	0	1
	Inst	A.S	Inst

Problema 2. (5 punti) Sia dato il sistema a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{dove} \qquad A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
$$y(t) = Cx(t),$$

1. Scrivere la decomposizione spettrale della matrice A e discutere le proprietà dei modi naturali
2. Calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t) = e^{At}$
3. Calcolare la risposta impulsiva $w(t)$ e la funzione di trasferimento $W(s)$
4. Calcolare la risposta forzata dello stato al gradino unitario

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda + \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \left(\lambda + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda+3)$$

$$\lambda_1 = -2, \quad r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ell_1 = \frac{1}{2}[1 \quad 1]$$

A.S.
eccitabile
Non osservabile

$$\lambda_2 = -3, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \ell_2 = \frac{1}{2}[1 \quad -1]$$

A.S.
Non eccitabile
osservabile

$$A = (-2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2} + (-3)\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}$$

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t} + e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-2t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$W(t) = C e^{At} B = 0 \qquad \forall t \geq 0 \iff W(s) = 0$$

RISPOSTA IMPULSIVA E F.d.T. dell'uscita NULLE.

CALCOLO DELLA RISPOSTA DELLO STATO AL GRADINO UNIT.

$$H(t) = e^{At}\cdot B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-2t} + e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-2t} - e^{-3t} & e^{-2t} + e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X(s) = H(s)U(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)\frac{1}{2}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1 - e^{-2t}}{2}$$

Problema 3 (6 punti)

Quesito 3a: A partire dalla trasformata zeta della funzione esponenziale, a^t, si calcoli la trasformata zeta della funzione $u(t) = \cos(\omega\, t)$.

Quesito 3b: Dato il seguente sistema a tempo discreto, con $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ scalari,

$$x(t+1) = x(t) + u(t),$$
$$y(t) = 3\,x(t),$$

$$W(z) = \frac{3}{z-1}$$

Se ne calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(t) = \cos\left((\pi/2)t\right)$.

$$u(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \qquad \cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\mathcal{Z}(\cos\omega t) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{j\omega}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-j\omega}} = \frac{1}{2}\frac{z\cdot(z-e^{j\omega} + z - e^{-j\omega})}{z^2 - 2(\cos\omega)z + 1}$$

$$\mathcal{Z}(\cos\omega t) = \frac{z(z-\cos\omega)}{z^2 - 2\cos\omega\, z + 1} \implies \mathcal{Z}\left(\cos\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{z^2}{z^2+1}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{W(z)U(z)}{z} = \frac{3}{z-1}\cdot\frac{z}{z^2+1} = \frac{3z}{(z-1)(z-j)(z+j)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_j}{z-j} + \frac{R_{-j}}{z+j}$$

$$R_1 = \left.\frac{3z}{z^2+1}\right|_{z=1} = \frac{3}{2} \quad , \quad R_j = \left.\frac{3}{z-1}\cdot\frac{z}{z+j}\right|_{z=j} = \frac{3}{j-1}\cdot\frac{1}{2}$$

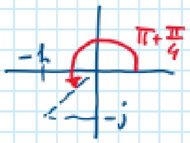
$$Y(z) = \frac{3}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{3}{j-1}\frac{1}{2}\frac{z}{z-j} + \frac{3}{-j-1}\cdot\frac{1}{2}\frac{z}{z+j}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}1(t) + \frac{3}{j-1}\frac{1}{2}j^t 1(t) + \frac{3}{-j-1}\frac{1}{2}(-j)^t 1(t), \qquad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$y(t) = \frac{3}{2}1(t) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{3}{j-1}\cdot\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}t}\right)1(t)$$

$$\frac{3}{j-1} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\varphi} \implies \varphi = -\left(\mathrm{ATAN}(-1) - \pi\right) = \pi + \frac{\pi}{4}$$

ANCHE $\frac{3}{j-1} = \frac{3}{2}(-1-j) \implies$



$$y(t) = \frac{3}{2}1(t) + \mathrm{Re}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}e^{j\varphi}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}t}\right)1(t)$$

$$y(t) = \frac{3}{2}1(t) + \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \varphi\right) \qquad \varphi = \pi + \frac{\pi}{4}$$

Check $y(0) = \frac{3}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C \;= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si calcoli uno stato iniziale $x(0) \in \mathbb{R}^4$ tale che negli istanti di tempo $t = 0, 1, 2, 3$ l'evoluzione libera dell'uscita sia pari a $y(0) = 0$, $y(1) = -3$, $y(2) = 3$ $y(3) = -3$.
4. Spiegare in breve perché nella costruzione della matrice di osservabilità ci si ferma all'ultimo blocco riga, pari a CA^{n-1} (dove n è l'ordine del sistema), e non si prosegue aggiungendo il blocco CA^n.

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \leftarrow \text{RIGA NULLA} \Rightarrow \rho(P_4) < 4$$

$\rho(P_4) = 3$: prime tre colonne lin. indipendenti

$$\mathcal{P} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Lo spazio $\mathcal{P}$ degli stati raggiungibili ha dim. 3 ed è costituito da tutti i vettori con $x_3 = 0$

Immediato verificare che

$$\mathcal{P} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

← Con questi tre vettori ottengo tutti i vettori della "vecchia" base

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(Q_4) = 3 \Rightarrow \dim(\mathcal{N}(Q_4)) = 1$$

$\mathcal{Q} = \mathcal{N}(Q_4)$

NOTA: la 4ª colonna è uguale alla 1ª cambiata di segno

$$\Rightarrow \mathcal{N}(Q_4) = \text{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \mathcal{Q} = \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{X}_2 : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{P}$: $\quad \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\mathcal{X}_3 = \emptyset$

$\mathcal{X}_4 : (\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^4 \quad \text{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Trovare $X(0)$ tale che

$y(0)=0,\ y(1)=-3,\ y(2)=3,\ y(3)=-3$

RICORDA: $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} X(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

NOTA: il vettore delle uscite è uguale alla 2° colonna di Q_4 cambiata di segno

$$\Rightarrow X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}}_{\text{INOSSERV.}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

vettore in $\mathcal{N}(Q_4)$

Seleziono la 2° colonna di Q_4 e le cambio il segno

Problema 5. (6 punti) Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - (2k-1)x_1(t)\,x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (1-k)x_2(t) - 2k\big(2\,x_1(t) + x_2^3(t)\big) \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0,0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, usando il secondo metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione quadratica.

$$f(x;k) = \begin{bmatrix} x_2 - (2k-1)\,x_1 x_2^2 \\ (1-k)x_2 - 4k\,x_1 - 2k\,x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} -(2k-1)x_2^2 & 1 - 2(2k-1)x_1x_2 \\ -4k & (1-k) - 6k\,x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$A_e = \frac{df}{dx}\bigg|_{x_e=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4k & 1-k \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A_e| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4k & \lambda-(1-k) \end{vmatrix} = \lambda^2 + (k-1)\lambda + 4k$$

Polinomio caratteristico
ANALISI del segno delle radici

k	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
1	+	+	+
$k-1$	−	−	+
$4k$	−	+	+
VAR	1	2	0

$k > 1$ A.S.

$$k<1 \begin{cases} k \in (0,1) & 2V \\ k \in (-\infty, 0) & 1V \end{cases} \quad \text{INSTAB.}$$

$k = 1 \quad \lambda^2 + 4 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 2$

CASO CRITICO $k=1$

$$f(x,1) = \begin{bmatrix} x_2 - (2k-1)x_1x_2^2 \\ (1-k)x_2 - 4k\,x_1 - 2k\,x_2^3 \end{bmatrix}_{k=1} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1x_2^2 \\ -4x_1 - 2x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{\alpha}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = [x_1 \;\; \alpha x_2]\cdot f(x,0) = x_1x_2 - x_1^2x_2^2 - \alpha 4 x_1x_2 - \alpha 2 x_2^4$$

$$\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \dot{V}(x) = -x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}x_2^4 \leq 0 \qquad \text{S.S.}$$

Soluzione $x_e = (0,0)$:

$$\begin{cases} K > 1 & \text{A.S.} \\ k = 1 & \text{S.S. (con Lyapunov)} \\ K < 1 & \text{Instabile} \end{cases}$$

NOTA: utilizzando una funzione di Lyapunov si può dimostrare la GAS per $K<1$