

TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes

Compito d'esame del 02-07-2026

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s-4)}$$

1. Se ne disegnano i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$
2. Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

Problema 2. (6 punti) Si considerino un sistema a tempo continuo e uno a tempo discreto, caratterizzati dalla stessa matrice A , matrice 2×2 a elementi reali ($A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$)

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(k+1) = Ax(k).$$

Della matrice A si conosce la seguente coppia autovalore/autovettore destro: $\lambda_1 = -1 + j$, $r_1 = \begin{bmatrix} j \\ -2 \end{bmatrix}$.

1. Si calcolino la matrice A , e le matrici di transizione $\Phi(k) = A^k$ e $\Phi(t) = e^{At}$ dei due sistemi;
2. Si discuta la stabilità dei modi naturali dei due sistemi.

Problema 3 (6 punti)

Si dato un sistema a tempo continuo, con ingresso e uscita scalari, caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = 2e^{-t} - 2e^{-4t}.$$

1. Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(t)$.
2. Si calcoli la pulsazione ω^* alla quale la risposta armonica risulti sfasata di $\pi/2$ in ritardo rispetto alla fase della sinusoide in ingresso
(*suggerimento*: per rispondere al quesito 2 si analizzino la parte reale e la parte immaginaria della funzione di trasferimento $W(j\omega)$).

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 0 \ 1 \ 1]$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , \mathcal{X}_3 e \mathcal{X}_4 della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si riporti la definizione di *stato raggiungibile*;
4. Si calcoli una possibile sequenza di ingresso $u(t)$ che porti il sistema dallo stato iniziale $x_0 = 0$ allo stato finale $\bar{x}_A = [1 \ 0 \ -1 \ 1]$.
5. Si calcoli una possibile sequenza di ingresso $u(t)$ che porti il sistema dallo stato iniziale $x_0 = 0$ allo stato finale $\bar{x}_B = [1 \ 1 \ 0 \ 0]$.

Problema 5. (6 punti) Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (k^2 - 1)x_1(t) + 3kx_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = kx_2(t) - x_2(t)x_1^2(t) \end{cases}$$

1. Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, usando il secondo metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione quadratica.
2. (*Facoltativo*): si studi la presenza di eventuali altri punti di equilibrio del sistema.

Nota: considerata la presenza di quesiti *extra*, la somma dei punteggi degli esercizi fa 34 e non 30.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
