Bozza Soluzioni compito Teoria dei Sistemi del 02-07-2026

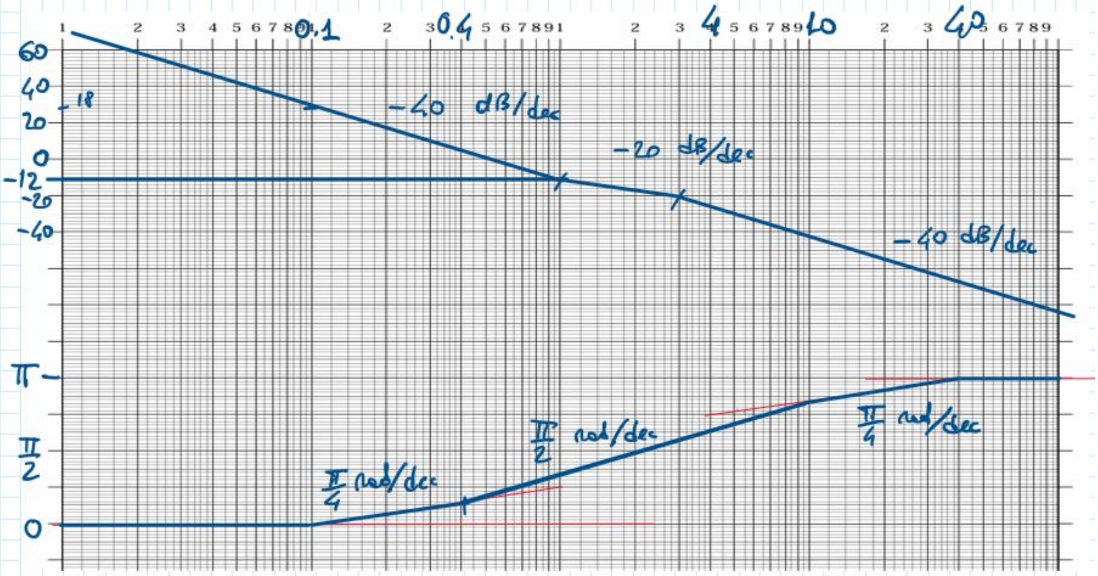
Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta

$$W(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s-4)}$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$
2. Si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, \infty)$ utilizzando sia il criterio di Nyquist che il criterio di Routh.

FORMA DI BODE

$$W(j\omega) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(j\omega)^2}\,\frac{1+j\omega}{1-j\frac{\omega}{4}} = K\cdot\frac{1}{4}\,\frac{1+j\omega}{\omega^2\left(1-j\frac{\omega}{4}\right)} \qquad \left|\frac{1}{4}\right|_{dB} = -12\ dB$$



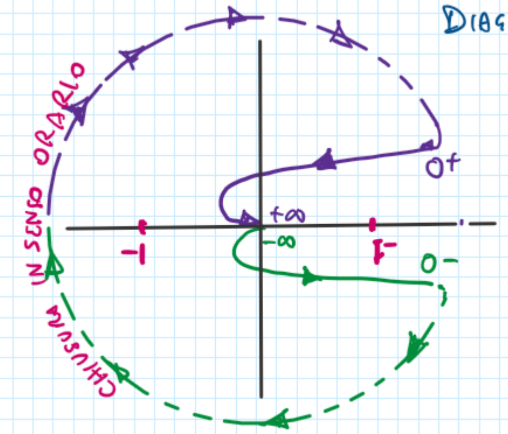


DIAGRAMMA POLARE

FORMULA DI NYQUIST

$$M^+_{CH} = M^+_{AP} - \overleftarrow{N} = 1 - \overleftarrow{N}$$

$k > 0$, $\overleftarrow{N} = -1 \Rightarrow M^+_{CH} = 2$

$k < 0$ $\overleftarrow{N} = 0 \Rightarrow M^+_{AP} = 1$

- ROUTH

$$P_{CH}(s) = s^3 - 4s^2 + ks + k$$

3	1	k
2	-4	k
1	$\frac{5}{4}k$	
0	k	

$$c_1 = \frac{k+4k}{4} = \frac{5}{4}k$$

	$k<0$	$k>0$
1	+	+
-4	−	−
$\frac{5}{4}k$	−	+
k	−	+
M^+_{CH} = VAR	1	2

Problema 2. (6 punti) Si considerino un sistema a tempo continuo e uno a tempo discreto, caratterizzati dalla stessa matrice A, matrice 2×2 a elementi reali ($A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$)

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(k+1) = Ax(k).$$

Della matrice A si conosce la seguente coppia autovalore/autovettore destro: $\lambda_1 = -1 + j, \quad r_1 = \begin{bmatrix} j \\ -2 \end{bmatrix}$.

1. Si calcolino la matrice A, e le matrici di transizione $\Phi(k) = A^k$ e $\Phi(t) = e^{At}$ dei due sistemi;
2. Si discuta la stabilità dei modi naturali dei due sistemi.

$$\lambda_1 = -1+j \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1^* = -1-j, \quad r_1 = \begin{bmatrix} j \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow r_2 = r_1^* = \begin{bmatrix} -j \\ -2 \end{bmatrix}$$

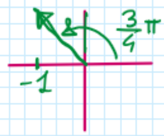
$$R = \begin{bmatrix} j & -j \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad |R| = -2j-2j = -4j \Rightarrow L = R^{-1} = \frac{j}{4}\begin{bmatrix} -2 & j \\ 2 & j \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1+j, \quad r_1 = \begin{bmatrix} j \\ -2 \end{bmatrix} \quad l_1^T = \frac{1}{4}[-2j \ \ -1]$$

$$\lambda_2 = -1-j, \quad r_2 = \begin{bmatrix} -j \\ -2 \end{bmatrix} \quad l_2^T = \frac{1}{4}[2j \ \ -1]$$

$$|\lambda_1| = \sqrt{2}$$

$$\langle \lambda_1 \rangle = \langle -1+j \rangle = \frac{3}{4}\pi$$



(ANCHE $\langle -1+j \rangle = \operatorname{atan}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$

$$A = \lambda_1 r_1 l_1^T + \lambda_2 r_2 l_2^T = 2\operatorname{Re}(\lambda_1 r_1 l_1^T)$$

$$A^k = \lambda_1^k r_1 l_1^T + \lambda_2^k r_2 l_2^T = 2\operatorname{Re}(\lambda_1^k \cdot r_1 l_1^T)$$

$$r_1 l_1^T = \begin{bmatrix} j \\ -2 \end{bmatrix} \cdot [-2j \ \ -1] \cdot \frac{1}{4} = \begin{bmatrix} 2 & -j \\ 4j & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4}$$

$$A = 2\operatorname{Re}(\lambda_1 r_1 l_1^T) = \frac{2}{4}\operatorname{Re}\left[(-1+j)\begin{bmatrix} 2 & -j \\ 4j & 2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1^k = |\lambda_1|^k \cdot e^{j\omega_1 k} = 2^{\frac{k}{2}} \cdot e^{j\frac{3}{4}\pi k}$$

$$\langle \lambda_1 \rangle = \omega_1 = \langle -1+j \rangle = \frac{3}{4}\pi$$

$$|\lambda_1| = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$A^k = 2\operatorname{Re}(\lambda_1^k r_1 l_1^T)$$

$$\sqrt{2}^k$$

$$= 2\operatorname{Re}\left(2^{\frac{k}{2}}\left(\cos\frac{3}{4}\pi k + j \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi k\right)\begin{bmatrix} 2 & -j \\ 4j & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\right)$$

$$A^k = \frac{1}{2}2^{\frac{k}{2}}\begin{bmatrix} 2\cos\frac{3}{4}\pi k & \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi k \\ -4\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi k & 2\cos\frac{3}{4}\pi k \end{bmatrix}$$

$$A^k = 2^{\frac{k}{2}}\begin{bmatrix} \cos\frac{3}{4}\pi k & \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi k \\ -2\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi k & \cos\frac{3}{4}\pi k \end{bmatrix}$$

Instabile a T. discreto
$|\lambda_1| = \sqrt{2} > 1$

$$e^{At} = 2\operatorname{Re}(e^{\lambda_1 t} r_1 l_1^T) = 2\operatorname{Re}\left(e^{-t} \cdot e^{jt}\begin{bmatrix} 2 & -j \\ 4j & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{Re}\left((\cos t + j \operatorname{sen} t)\begin{bmatrix} 2 & -j \\ 4j & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t & \frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$$

Asintoticamente stabile a T. continuo
$\operatorname{Re}(\lambda_1) = -1 < 0$

Problema 3 (6 punti)

Si dato un sistema a tempo continuo, con ingresso e uscita scalari, caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$w(t) = 2\,e^{-t} - 2\,e^{-4t}.$$

1. Si calcolino la risposta forzata e la risposta armonica all'ingresso $u(t) = \cos(t)$.
2. Si calcoli la pulsazione ω^* alla quale la risposta armonica risulti sfasata di $\pi/2$ in ritardo rispetto alla fase della sinusoide in ingresso
   (*suggerimento*: per rispondere al quesito 2 si analizzino la parte reale a la parte immaginaria della funzione di trasferimento $W(j\omega)$).

$$w(t) = 2e^{-t} - 2e^{-4t} \rightarrow W(s) = 2\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4}\right) = 2\,\frac{(s+4)-(s+1)}{(s+1)(s+4)}$$

$$W(s) = \frac{6}{(s+1)(s+4)}, \qquad u(t) = \cos(t) \rightarrow U(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{6s}{(s+1)(s+4)(s^2+1)} = \frac{6s}{(s+1)(s+4)(s-j)(s+j)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+4} + \frac{R_4}{s-j} + \frac{R_4^*}{s+j}$$

$$R_1 = \left.\frac{6s}{(s+4)(s^2+1)}\right|_{s=-1} = \frac{6(-1)}{3\cdot 2} = -1, \qquad R_4 = \frac{6j}{(j+1)(j+4)\,2j} = W(j)\cdot\frac{1}{2}$$

$$R_2 = \left.\frac{6s}{(s+1)(s^2+1)}\right|_{s=-4} = \frac{6(-4)}{-3\cdot 17} = \frac{8}{17}, \qquad R_4^* = \frac{6(-j)}{(-j+1)(-j+4)(-2j)} = W(j)^*\,\frac{1}{2}$$

$$y(t) = -e^{-t} + \frac{8}{17}e^{-4t} + \underbrace{\left(\frac{W(j)}{2j}\right)e^{jt} + \left(\frac{W(j)}{2j}\right)^* e^{-jt}}_{\text{RISPOSTA ARMONICA}}$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{W(j)}{2j}\,e^{jt}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{W(j)}{2}\,e^{jt}\right) = \frac{2}{8}\,\mathrm{Re}\left(|W(j)|\,e^{j(t+\angle W(j))}\right)$$

$$= |W(j)|\cdot\cos\left(t + \angle W(j)\right)$$

$$|W(j)| = \frac{6}{|j+1|\,|j+4|} = \frac{6}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}, \qquad \angle W(j) = -\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$$

Quesito 2 :

$$W(j\omega) = \frac{6}{(1+j\omega)(4+j\omega)} = \frac{6(1-j\omega)(4-j\omega)}{(1+1)(16+1)}$$

$$W(j\omega) = \frac{3}{17}\cdot\left(4-\omega^2 - j\omega(4+1)\right) = \frac{3}{17}\left(4-\omega^2 - j5\omega\right)$$

$$\angle W(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(W(j\omega)) = 0 \text{ AND } \mathrm{Im}(W(j\omega)) < 0$$

$$4-\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 2 \Rightarrow W(j2) = -j\,\frac{30}{17} \Rightarrow \mathrm{Im}(W(j2)) = -\frac{30}{17} < 0$$

$$\boxed{\omega^* = 2}$$

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C \ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. Si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. Si riporti la definizione di *stato raggiungibile*;
4. Si calcoli una possibile sequenza di ingresso $u(t)$ che porti il sistema dallo stato iniziale $x_0 = 0$ allo stato finale $\bar{x}_A = [1 \ \ 0 \ \ -1 \ \ 1]$.
5. Si calcoli una possibile sequenza di ingresso $u(t)$ che porti il sistema dallo stato iniziale $x_0 = 0$ allo stato finale $\bar{x}_B = [1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0]$.

$$P_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B & AB & A^2B & A^3B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

RANK$(P_4) = 2 \iff$ Solo B e AB sono linearmente indipendenti:

$A^2B = 2 \cdot AB$, $A^3B = 4 \cdot AB$

$$\Rightarrow \mathcal{R} = \mathrm{Im}(P_4) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$Q_4 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ -6 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{array} \end{array}$$

rank$(Q_4) = 3$ dim$(\mathcal{N}(Q_4)) = 4 - 3 = 1$

la colonna 2 è zero

$$\Rightarrow \mathcal{I} = \mathcal{N}(Q_4) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \{\emptyset\} \\ \mathcal{X}_2 &= \mathcal{R} = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ \mathcal{X}_3 &= \mathcal{I} = \mathrm{span}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{X}_4 = \mathrm{span}(u_4)$$

u_4: qualsiasi vettore indipendente dai vettori che generano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{I}$

ad esempio $u_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

check $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftarrow$ MATRICE TRIANGOLARE $\Rightarrow$ NON SINGOLARE

3. VEDERE SUGLI APPUNTI LA DEFINIZIONE DI STATO RAGGIUNGIBILE

QUESITI 4 e 5.

Poiché $n=4$, se uno stato è raggiungibile può essere raggiunto in 4 passi
(in realtà bastano 2 passi perché $\mathrm{rank}(P_4)=2$)

$$x(4)=Bu(3)+ABu(2)+A^2Bu(1)+A^3Bu(0)$$
$$=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & A^3B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(3)\\u(2)\\u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$$

Pongo $x(4)=\bar{x}_A$

$$\bar{x}_A=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2&4\\0&0&0&0\\0&-1&-2&-4\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(3)\\u(2)\\u(1)\\u(0)\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}u(3)=1\\u(2)=1\\u(1)=0\\u(0)=0\end{matrix}$$

$1+0$

Pongo $x(4)=\bar{x}_B=[1\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$;

ATTENZIONE $\bar{x}_B\notin \mathrm{Im}(P_4)$: NON RAGGIUNGIBILE
NON ESISTE ALCUNA SEQUENZA $u(t)$ CHE PORTA LO STATO DA $x_0=0$ a $\bar{x}_B$

Problema 5. (6 punti) Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (k^2-1)x_1(t) + 3k\,x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = k\,x_2(t) - x_2(t)x_1^2(t) \end{cases}$$

1. Si studi la stabilità del punto di equilibrio $x_e = (0,0)$ al variare del parametro $k \in (-\infty, \infty)$ usando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, usando il secondo metodo di Lyapunov, utilizzando una funzione quadratica.
2. (*Facoltativo*): si studi la presenza di eventuali altri punti di equilibrio del sistema.

$$f(x,k) = \begin{bmatrix} (k^2-1)\,x_1 + 3k\,x_1^3 \\ k\,x_2 - x_2 x_1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} k^2-1 & 9k\,x_1^2 \\ -2x_1x_2 & k \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e=0} = \begin{bmatrix} k^2-1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{Autovalori} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = k^2-1 \\ \lambda_2 = k \end{array}$$

Stabilità asintotica se $(\lambda_1 < 0)$ AND $(\lambda_2 < 0)$

INSTABILITÀ se $(\lambda_1 > 0)$ OR $(\lambda_2 > 0)$

$\lambda_1 = k^2 - 1 \iff \lambda_1 < 0 \iff k \in (-1, 1)$

$\lambda_2 = k \iff \lambda_2 < 0 \iff k \in (-\infty, 0)$

[$k^2 - 1 \Rightarrow$ + -1 − 1 + ovvero $k^2 - 1 < 0 \iff |k| < 1 \iff k \in (-1,1)$]

A.S. : $(\lambda_1<0)$ AND $(\lambda_2<0) \iff k \in (-1, 0)$

INSTABILITÀ : $(\lambda_1>0)$ OR $(\lambda_2>0) \iff k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

2 CASI CRITICI $k=0$ e $k=-1$

$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{\alpha}{2}x_2^2, \quad \alpha > 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = \frac{dV}{dx} \cdot f(x) = [x_1 \;\; \alpha x_2] \cdot f(x)$

CASO $k=0$

$$f(x,0) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2x_1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{V}(x) = [x_1 \;\; \alpha x_2] \cdot \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 x_1^2 \end{bmatrix} = -x_1^2 - \alpha x_2^2 x_1^2 \le 0$$

SEMI DEF NEG, $\forall \alpha > 0$

$\Downarrow$

x_e S.S.

CASO $k=-1$

$$f(x,1) = \begin{bmatrix} -3x_1^3 \\ -x_2 - x_2 x_1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{V}(x) = [x_1 \;\; \alpha x_2] \begin{bmatrix} -3x_1^3 \\ -x_2 - x_2x_1^2 \end{bmatrix} = -3x_1^4 - \alpha x_2^2 - \alpha x_2^2 x_1^2 < 0$$

DEF. NEG.

$\Downarrow$

x_e A.S.

Risultato finale

$x_e = 0$ A.S. per $k \in [-1, 0)$

S.S. per $k = 0$

Instabile per $k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

CALCOLO DI ALTRI POSSIBILI PUNTI DI EQUILIBRIO

$$f(x,k)=\begin{bmatrix}(k^2-1)\,x_1+3k\,x_1^3\\ k\,x_2-x_2\,x_1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Seconda equaz.

$x_2(k-x_1^2)=0 \Rightarrow x_1=\pm\sqrt{k},\ \forall x_2$, oppure $x_2=0,\ \forall x_1$

Prima equazione

$x_1\left((k^2-1)+3k\,x_1^2\right)=0 \Rightarrow k^2-1+3k\cdot k=0 \Rightarrow 4k^2-1=0 \quad k=\pm\frac{1}{2}$

Punti di equilibrio diversi

solo per $k=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow x_{e,1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},x_2\right)$, $x_{e_2}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},x_2\right)$ $\forall x_2$

Se $x_2=0$, x_1: $\quad x_1\left((k^2-1)+3k\,x_1^2\right)=0 \begin{cases}x_1=0\\ x_1=\pm\sqrt{-\frac{k^2-1}{3k}}\end{cases}$

Per tutti k: $\frac{1-k^2}{3k}>0$

Ho due punti di equilibrio

$x_{e,1}=\left(\sqrt{\frac{1-k^2}{3k}},0\right)$ e $x_{e2}=\left(-\sqrt{\frac{1-k^2}{k}},0\right)$ per $k\in\left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]$

Solo per $1-k^2>3k \Rightarrow -k^2-3k+1>0$

$k_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9+4}{4}}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$