MODELLI MONODIMENSIONALI DI TRAVE ATTI A DESCRIVERE LA BIFORCAZIONE PER TORSIONE

Nicola Rizzi*, Amabile Tatone**, Antonio Di Carlo*

1. INTRODUZIONE

È noto che i più comuni casi di biforcazione per un'asta inizialmente rettilinea compressa siano quelli di tipo flessionale, torsionale, flesso–torsionale.

Il primo caso anche se noto già in precedenza fu oggetto di accurata e sistematica indagine sperimentale da parte di Musschenbroeck (1729) che riuscì anche ad indicare una formula empirica per il calcolo del carico di biforcazione. Successivamente, ma indipendentemente dal lavoro di Musschenbroeck, Eulero (1743) fornì una adeguata risposta qualitativa e quantitativa al problema utilizzando un modello di trave (l'*elastica*) caratterizzato da una funzione costitutiva che lega la coppia flettente alla variazione di curvatura dell'asse (legge di Bernoulli–Eulero).

Gli altri casi sono stati evidenziati solo nei primi decenni del nostro secolo in relazione alla diffusione dell'uso di travi a sezione sottile aperta nel settore delle costruzioni aeronautiche. Wagner (1929) [1] sembra sia stato il primo (vedi Bleich [2]) a fornire un modello teorico idoneo a rendere conto del fenomeno in considerazione. Tale approccio, parzialmente rivisto da Kappus [3] ha dato luogo ad una nota e diffusa teoria (di Wagner–Kappus) accreditata come modello qualitativamente soddisfacente del fenomeno del buckling flesso–torsionale o torsionale.

L'approccio adottato in questi lavori e largamente (quasi esclusivamente) seguito successivamente consiste nella generazione di un modello di continuo *monodimensionale*, che viene poi utilizzato per lo studio del fenomeno, a partire da un continuo tridimensionale. I procedimenti seguiti sono inevitabilmente complessi, spesso tortuosi e approssimativi, tali da generare forti dubbi sulla attendibilità dei risultati. D'altro canto il modello monodimensionale, nonostante costituisca lo strumento di indagine essenziale, è presentato privo completamente di autonomia e provvisto solo di doti ereditate.

Tutto questo spinge a chiedersi se non sia opportuno mutare radicalmente punto di vista.

Gli sviluppi della teoria dei continui con struttura, in generale, e di quelli monodimensionali, in particolare, consentono di formulare modelli con capacità descrittive sufficienti a descrivere il comportamento meccanico delle travi.

---

* Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma "La Sapienza", via Eudossiana 18, 00184 Roma.

** Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, delle Acque e del Terreno, Università de L'Aquila, 67040 Monteluco di Roio (L'Aquila).

Se allora si è convinti della possibilità di descrivere un certo fenomeno attraverso un modello che in definitiva è monodimensionale (come avviene per il caso in esame) appare naturale scegliere un modello diretto senza porsi il problema di ricavarlo da un altro da utilizzare come prototipo.

Adottare questo punto di vista significa da una parte collocare l'indagine nell'ambito di una teoria meccanica internamente coerente, rigorosa e rigogliosa, e dall'altro avere la possibilità di utilizzare i numerosi e notevoli risultati già disponibili, soprattutto in campo non lineare.

Naturalmente ciò che in primo luogo va richiesto al modello è una generica capacità di descrivere *qualitativamente* il fenomeno in esame liberandosi da tutte le preoccupazioni—dominanti nei metodi di proiezione—di ottenere informazioni quantitative. Queste possono così essere affidate ad un'altra fase di sviluppo del modello— completamente indipendente dalla prima— che consiste nella ricerca e costruzione delle funzioni costitutive.

Ritornando al problema in esame, se l'obiettivo è quello di fornire un modello idoneo a descrivere *qualitativamente* il fenomeno della biforcazione per torsione sotto l'azione di una forza assiale, è intento degli autori mostrare che è sufficiente ricorrere al modello di Kirchhoff [5] (sezioni rigide ed ortogonali all'asse) a patto solo di adottare delle funzioni costitutive un po' più ricche.

In un ambito un po' diverso, cenni a questo problema possono trovarsi in [6]. In realtà si mostra qui di seguito come il fenomeno possa essere evidenziato in condizioni molto più restrittive di quelle lì assunte.

È evidente però che l'influenza dell'ingobbamento delle sezioni sul comportamento delle travi può diventare importante al punto da risultare determinante, come avviene nel caso delle travi a sezione aperta sottile. D'altronde è proprio in questi casi che il fenomeno di biforcazione in esame acquista evidenza sperimentale e quindi interesse tecnico.

Da ciò la necessità di ricorrere ad un modello di trave un po' più ricco e capace di render conto dell'influenza dell'ingobbamento. Un tale modello, formulato da alcuni degli autori in [9] viene qui ripreso per mostrare come si modificano le equazioni che reggono il problema in esame.

2. ANALISI LINEARIZZATA DI BIFORCAZIONE PER UN MODELLO SENZA INGOBBAMENTO

In questo paragrafo si affronta il problema della biforcazione per un'asta inizialmente rettilinea soggetta a forze assiali di estremità adottando, quale modello matematico, un continuo monodimensionale con struttura che, per gli aspetti geometrici (vincoli di indeformabilità a taglio) e dinamici, coincide con quello di Kirchhoff mentre se ne discosta per quanto attiene alle caratteristiche del materiale.

Si consideri pertanto una trave inizialmente rettilinea e con sezioni ortogonali all'asse, soggetta a forze assiali di estremità e sia s l'ascissa curvilinea sulla linea d'asse nella configurazione di riferimento. Si consideri inoltre una base fissa $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3)$ ortonormale, con $\mathbf{D}_3$ collineare all'asse della trave.

Le equazioni di bilancio, in forma scalare, in assenza di forze di volume, sono

$$\begin{aligned}
&Q_1' + \tau Q_2 - \mu_2 N = 0\\
&Q_2' + \mu_1 N - \tau Q_1 = 0\\
&N' + \mu_2 Q_1 - \mu_1 Q_2 = 0\\
&M_1' - \tau M_2 - \mu_2 T - (1+\epsilon) Q_2 = 0\\
&M_2' - \mu_1 T - \tau M_1 + (1+\epsilon) Q_1 = 0\\
&T' - \mu_2 M_1 - \mu_1 M_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

In (2.1) l'apice indica derivazione rispetto alla ascissa curvilinea s; μ_1 e μ_2 sono le misure della deformazione flessionale, τ della torsione, ϵ dell'elongazione (vedi per es. [9] e [4]). Indicando inoltre con $\mathbf{t}, \mathbb{T}$ la forza e la coppia di contatto e con $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ un campo di basi punto per punto solidali alla sezione della trave, tali da essere coincidenti con $(\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3)$ nella configurazione di riferimento, si è posto

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= Q_1 \mathbf{d}_1 + Q_2 \mathbf{d}_2 + N \mathbf{d}_3\\
\mathbb{T} &= M_1 \mathbf{d}_2 \wedge \mathbf{d}_3 + M_2 \mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{d}_1 + T \mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_2
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Assunto che il materiale sia omogeneo ed elastico (non necessariamente iperelastico) le più generali funzioni costitutive che si possono fornire sono del tipo

$$\begin{aligned}
N &= \hat{N}(\epsilon, \mu_1, \mu_2, \tau)\\
M_1 &= \hat{M}_1(\epsilon, \mu_1, \mu_2, \tau)\\
M_2 &= \hat{M}_2(\epsilon, \mu_1, \mu_2, \tau)\\
T &= \hat{T}(\epsilon, \mu_1, \mu_2, \tau)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

In realtà, come vedremo tra breve, ai nostri fini interessa una classe molto più ristretta di funzioni costitutive. In particolare è sufficiente considerare materiali iperelastici.

Si verifica immediatamente che il problema al contorno in esame, a meno di un moto rigido, ammette la soluzione banale

$$\mu_1 = \mu_2 = \tau = 0 \tag{2.4}$$

caratterizzata da una deformazione solo estensionale dell'asta, la quale implica

$$\begin{aligned}
&Q_1 = Q_2 = 0\\
&M_1 = M_2 = T = 0\\
&N' = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

purchè le funzioni costitutive siano sufficientemente regolari e soddisfino le (2.5) e inoltre la funzione $\hat{N}(\cdot, 0, 0, 0)$ sia invertibile.

Linearizzando le equazioni (2.1) in corrispondenza di una biforcazione dalla soluzione (*fondamentale*) (2.4)–(2.5) si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\dot{Q}_1' - N\dot{\mu}_2 = 0 \\
&\dot{Q}_2' + N\dot{\mu}_1 = 0 \\
&\dot{N}' = 0 \\
&\dot{M}_1' - (1+\epsilon)\dot{Q}_2 = 0 \\
&\dot{M}_2' + (1+\epsilon)\dot{Q}_1 = 0 \\
&\dot{T}' = 0
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

avendo indicato con il punto le derivate, rispetto ad un parametro perturbativo, delle differenze tra soluzione *biforcata* e soluzione *fondamentale*. Dalle equazioni precedenti derivano

$$
\begin{aligned}
&\dot{M}_1'' + (1+\epsilon)N\dot{\mu}_1 = 0 \\
&\dot{M}_2'' + (1+\epsilon)N\dot{\mu}_2 = 0 \\
&\dot{T}' = 0 \\
&\dot{N}' = 0
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Nel caso si assumano le funzioni costitutive di Kirchhoff–Clebsch la $(2.7)_4$, assieme alle $(2.6)_{1,2}$, serve a determinare le reazioni vincolari, la $(2.7)_3$ fornisce $\dot{\tau}' = 0$ e le $(2.7)_{1,2}$ diventano le equazioni della biforcazione di Eulero.

Se però si assume

$$
\begin{aligned}
N &= \hat{N}(\epsilon,\tau) \\
M_1 &= \hat{M}_1(\mu_1) \\
M_2 &= \hat{M}_2(\mu_2) \\
T &= \hat{T}(\epsilon,\tau)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

dalle (2.7) si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\hat{M}_{1\mu_1}\dot{\mu}_1'' + (1+\epsilon)N\dot{\mu}_1 = 0 \\
&\hat{M}_{2\mu_2}\dot{\mu}_2'' + (1+\epsilon)N\dot{\mu}_2 = 0 \\
&\hat{T}_\epsilon\dot{\epsilon}' + \hat{T}_\tau\dot{\tau}' = 0 \\
&\hat{N}_\epsilon\dot{\epsilon}' + \hat{N}_\tau\dot{\tau}' = 0
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

dove gli indici $\epsilon, \mu_1, \mu_2, \tau$ denotano le derivate parziali rispetto alle corrispondenti variabili.

Indicando con λ il parametro perturbativo si facciano le seguenti ipotesi sulle funzioni costitutive

$$
\begin{aligned}
\hat{T}_\epsilon/\hat{T}_\tau &= O(\lambda) \\
\hat{N}_\tau/\hat{N}_\epsilon &= O(\lambda)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Si osservi che tale richiesta equivale ad assumere per le azioni di contatto una dipendenza *preferenziale* da alcune componenti della misura della deformazione. In tal caso le (2.9) divengono

$$
\begin{aligned}
&\hat{M}_{1\mu_1}\dot{\mu}_1'' + (1+\epsilon)N\dot{\mu}_1 = 0\\
&\hat{M}_{2\mu_2}\dot{\mu}_2'' + (1+\epsilon)N\dot{\mu}_2 = 0\\
&\hat{T}_\tau\dot{\tau}' = 0\\
&\hat{N}_\epsilon\dot{\epsilon}' = 0
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Se $\hat{N}_\epsilon(\epsilon,0) \neq 0, \hat{T}_\tau(\epsilon,0) \neq 0$, per via delle condizioni dinamiche al contorno ($\dot{T} = 0$, $\dot{N} = 0$) si ottiene una soluzione con $\dot{\tau} = 0$, a cui non corrisponde dunque alcuna deformazione torsionale. Le $(2.11)_{1,2}$ forniscono di nuovo le equazioni della biforcazione di Eulero—a meno dei termini $(1+\epsilon)$ che d'altronde scompaiono se si fa l'ipotesi che sia $\epsilon = O(\lambda)$.

Al contrario di quanto accade per il modello di Kirchhoff–Clebsch, in questo caso vi è però un'altra possibilità. Infatti se per opportuni valori di ϵ risulta $\hat{T}_\tau(\epsilon,0) = 0$ allora $\dot{\tau}'$ può essere qualunque. In particolare se $\hat{T}_\tau(\cdot,0)$ e $\hat{N}(\cdot,0)$ sono lineari si ottiene la equazione

$$
(C - \frac{N}{I})\dot{\tau}' = 0 \tag{2.12}
$$

che, a meno del termine dovuto al bimomento, coincide con quella classica del buckling torsionale (vedi per es. [7]).

E' facile mostrare che si possono dare funzioni costitutive, di tipo iperelastico, che soddisfano i requisiti richiesti. Per esempio si può porre

$$
\begin{aligned}
N &= A\epsilon + \frac{1}{2}B\tau^2\\
T &= (B\epsilon + C)\tau + D\tau^2
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Tali funzioni coincidono, a meno dei termini in μ_1, μ_2, con quelle trovate da Møllmann [8] attraverso un procedimento di proiezione da un modello tridimensionale di Cauchy.

Naturalmente le (2.11) non ammettono soluzioni in cui sono presenti insieme deformazioni torsionali e flessionali.

Tale circostanza potrebbe verificarsi quando si volesse considerare un accoppiamento tra forza normale e coppie flettenti ovvero quando si volesse modellare un caso di "pressoflessione". Questo è infatti il caso che si presenta in modelli derivati da un continuo tridimensionale ove si assuma l'asse della trave coincidente con la linea dei centri di taglio mentre le componenti delle azioni di contatto si pensano "ridotte" al centro elastico. Qui comunque non ci si occupa in dettaglio del problema, peraltro banale.

3. MODELLO CON INGOBBAMENTO

Come si è detto nel paragrafo precedente la (2.12) coincide con l'analoga riportata per esempio in [7] a meno del termine in cui compare una derivata di $\dot{\tau}$ di ordine più elevato ($\dot{\tau}'''$). È il termine che nella letteratura tecnica è indicato con il nome di "coppia torcente di ingobbamento". Esso è davvero legato all'ingobbamento e ciò spiega come non compaia nelle equazioni ricavate nel paragrafo precedente. In realtà esso potrebbe comparire anche nell'ambito di un modello "alla Kirchhoff" a patto però di abbandonare funzioni costitutive non già iperelastiche ma addirittura elastiche per sostituirle con altre che descrivono un materiale *non* semplice.

Questo approccio tuttavia appare agli autori piuttosto innaturale mentre più plausibile sembra il procedimento proposto in [9].

Lì viene introdotto un modello di continuo monodimensionale più ricco di quello proposto nel paragrafo precedente. In particolare si introduce un altro parametro (scalare) che ha il significato di misura dell'ingobbamento α.

Ne consegue l'introduzione di due ulteriori componenti delle azioni di contatto π e ϖ, rispettivamente duali di $d\alpha/dt$ e $d\alpha'/dt$. Lo scalare ϖ ha il significato di "bimomento" poichè spende potenza quando l'ingobbamento non è costante.

Fatto cruciale è poi quello di postulare la presenza di un vincolo fra torsione e ingobbamento, cioè

$$\alpha = \check{k}(\tau) \tag{3.1}$$

Esso è l'espressione della circostanza, comunemente accettata, che l'ingobbamento è un *prodotto* della torsione.

Al vincolo imposto, in forza dell'assioma di determinismo per i materiali vincolati, corrispondono delle reazioni vincolari; di esse risultano essere in generale diverse da zero solo π_v e T_v con $T_v = \pi_v d\check{k}/d\tau$.

Se in particolare si assume che

(a) non vi siano forze esterne di volume che spendano potenza su $d\alpha/dt$;
(b) la parte di π determinata dal moto sia $\pi_a = 0$;
(c) il bimomento abbia una funzione costitutiva del tipo $\varpi = \hat{\varpi}(\alpha')$

si ottiene facilmente la relazione

$$T_v = \varpi' \frac{d\check{k}}{d\tau} \tag{3.2}$$

che lega la coppia torcente reattiva al bimomento. La (3.2) si può scrivere anche

$$T_v = \hat{\varpi}_{\alpha'}(\check{k}_\tau \check{k}_{\tau\tau} \tau'^2 + \check{k}_\tau^2 \tau'') \tag{3.3}$$

Linearizzando la (3.3) nell'intorno della soluzione (2.4)–(2.5) si ottiene

$$\dot{T}_v = \hat{\varpi}_{\alpha'} \check{k}_\tau^2 \dot{\tau}'' \tag{3.4}$$

Adottando questo modello si ottengono delle equazioni linearizzate di biforcazione corrispondenti alle (2.11) che risultano diverse solo nella terza equazione che diventa

$$C_o \dot{\tau}''' + \hat{T}_\tau \dot{\tau}' = 0 \tag{3.5}$$

mentre alla (2.12) corrisponde

$$C_o \dot{\tau}''' + (C - \frac{N}{I}) \dot{\tau}' = 0 \tag{3.6}$$

avendo posto $C_o := \hat{\varpi}_{\alpha'} \check{k}_\tau^2$.

Le equazioni così modificate governano la biforcazione tenendo in conto anche gli effetti prodotti su di essa da quella particolare deformazione della sezione chiamata *ingobbamento*.

Anche in questo caso, come nel paragrafo precedente, si è scelto un modello *direttamente* monodimensionale senza porsi in alcun modo il problema di dedurlo da un altro modello (ad es. tridimensionale), mostrandone la capacità di descrivere il fenomeno della biforcazione per torsione.

BIBLIOGRAFIA

[1] Wagner, H., Tech Hochschule, Danzig, 25th Anniv. Publ., 1929, translated in *NACA Tech. Mem.* 807, 1936

[2] Bleich, F. *Buckling Strength of Metal Structures*, Mc Graw–Hill, New York, 1952

[3] Kappus, R., *Luftfahrt-Forsch.*, Vol. 14, 1937, translated in *NACA Tech. Mem.* 851, 1938

[4] Love, A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York, 1944.

[5] Kirchhoff, G. "Über des Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes," *J. reine angew. Math. (Crelle)*, Vol. 56, 1859, pp 285–313.

[6] Antmann, S.S. "Kirchhoff's Problem for Nonlinearly Elastic Rods," *Quaterly of Applied Mathematics*, Vol. XXXII, No. 3, October 1974.

[7] Timoshenko, S.P., Gere, J.M., Theory of elastic stability, Mc Graw-Hill (1961).

[8] Møllmann, H. "Finite Displacements of Thin–Walled Beams", Parts 1 and 2, Danish Center for Appl. Math. and Mech., Tech. Univ. of Denmark, Reports n. 252 and 253, 1982.

[9] Rizzi, N., Tatone, A. "Modelli Monodimensionali di Gusci Prismatici Sottili," *Atti IX Congresso Nazionale AIMETA, Bari 4-7 settembre 1988*, AIMETA, 1988.