

# OSCILLAZIONI DI UNA LAMINA METALLICA ACCOPPIATA AD UNA LAMINA PIEZOELETTRICA

A. TATONE<sup>1</sup>, E. SILVERII<sup>1</sup> e G. ROTOLI<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, delle Acque e del Terreno,  
Università dell'Aquila, L'Aquila,*

<sup>2</sup>*Dipartimento di Energetica, Università dell'Aquila, L'Aquila*

## SOMMARIO

Una lamina di alluminio incastrata ad una estremità e con un accelerometro fissato alla estremità libera è fatta oscillare applicando un potenziale periodico ad una lamina di materiale piezoelettrico che la ricopre parzialmente. Il segnale dell'accelerometro è registrato e confrontato con la risposta prevista da un modello. Fissata una estremità della lamina di alluminio ad uno shaker, a questo viene inviato un segnale periodico. Viene misurato il potenziale generato nella lamina piezoelettrica, che svolge ora la funzione di sensore, e questo viene poi confrontato con il valore previsto. Il modello delle due lamine accoppiate viene definito come un unico continuo monodimensionale. La caratterizzazione costitutiva della lamina piezoelettrica viene data in una forma sommaria che permette l'uso diretto delle specifiche del produttore.

## **ABSTRACT**

A piezoelectric lamina is bonded to an aluminum lamina, covering it only for a fraction of its length. The aluminum lamina is clamped at one end. A periodic voltage is applied to the piezoelectric lamina and the output of an accelerometer fixed at the free end is recorded. In a different experimental setting the aluminum lamina is fixed by one end to the head of a shaker. The shaker is driven by a periodic signal and the voltage in the piezoelectric lamina, working this time as a sensor, is measured. In both cases the experimental outcome is compared with the theoretical response. The model for the two coupled laminae is defined as a one-dimensional continuum. A constitutive characterization of the piezoelectric lamina is given in a coarse form allowing a direct use of the manufacturer specifications.

## 1 Modello di continuo laminato

Ad una lamina di alluminio è sovrapposta parzialmente una lamina piezoelettrica, incollata ad essa perfettamente. La lamina di alluminio ha lunghezza libera, larghezza e spessore rispettivamente di 51 cm, 2.54 cm, 0.3175 cm. La lamina piezoelettrica, ha lunghezza, larghezza e spessore rispettivamente di 5.08 cm, 2.54 cm, 0.0381 cm ed è fissata a circa 6 cm dall'estremità incastrata della lamina di alluminio.

Considerando solo moti piani, trasversali rispetto alle facce delle lamine, l'insieme delle due lamine viene descritto come un continuo monodimensionale in cui si utilizza per la prima lamina il modello di trave di Timoshenko, per la seconda il modello di filo. Il moto sia definito dalla seguenti funzioni

$$\mathbf{x} : [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \mathbf{a} : [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{x}_p : [\ell_1, \ell_2] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}. \quad (1)$$

essendo  $\mathcal{E}$  uno spazio euclideo di dimensione 2,  $\mathcal{V}$  il suo spazio delle traslazioni, i vettori  $\mathbf{a}(\ell, t)$  di norma unitaria. Ad un istante  $t$  la coppia  $(\mathbf{x}(\cdot, t), \mathbf{a}(\cdot, t))$  descrive la configurazione della lamina di alluminio, mentre  $\mathbf{x}_p(\cdot, t)$  descrive la configurazione della lamina piezoelettrica. Nel seguito si ometterà in generale il secondo argomento.

L'insieme  $\mathcal{A}$  degli *atti di moto* sia costituito dalle velocità realizzabili lungo tutti i possibili moti (1), che si indicheranno con

$$\mathbf{w} : [0, L] \rightarrow \mathcal{V}, \quad \boldsymbol{\omega} : [0, L] \rightarrow \mathcal{V}^\perp, \quad \mathbf{w}_p : [\ell_1, \ell_2] \rightarrow \mathcal{V}, \quad (2)$$

essendo  $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$  lo spazio delle traslazioni della estensione di  $\mathcal{E}$  ad uno spazio tridimensionale. Qui si è interessati a descrivere solo moti in cui si mantiene aderenza perfetta tra le due lamine

incollate tra loro, risultando

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x} + h \mathbf{a}. \quad (3)$$

Nonostante ciò, affinché sia possibile descrivere la interazione tra le lamine, occorre considerare tra gli atti di moto anche quelli incompatibili con il vincolo di aderenza (3).

Seguendo lo schema assiomatico presentato in [1], si definisce *potenza virtuale esterna* il funzionale

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(\text{ext})}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}_p) = & \int_0^L \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} dl + \int_0^L \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\omega} dl \\ & + \mathbf{s}_l \cdot \mathbf{w}(0) + \mathbf{s}_r \cdot \mathbf{w}(L) + \mathbf{m}_l \cdot \mathbf{w}(0) + \mathbf{m}_r \cdot \mathbf{w}(L) \end{aligned} \quad (4)$$

Si noti che si è assunto che non ci siano forze esterne applicate alla lamina piezoelettrica.

La *potenza virtuale interna* sia definita come somma di parti corrispondenti a ciascuna delle due lamine

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(\text{int})}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}_p) = & \int_0^L (\boldsymbol{\mathfrak{z}} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}' + \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}') dl \\ & + \int_{\ell_1}^{\ell_2} (\boldsymbol{\mathfrak{z}}_p \cdot \mathbf{w}_p + \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{w}'_p) dl. \end{aligned} \quad (5)$$

Nella espressione (5) è utile mettere in evidenza la parte da attribuire esplicitamente alla

interazione tra le lamine

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(\text{int})}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}_p) &= \int_0^L (\check{\mathfrak{z}} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}' + \check{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}') dl \\ &+ \int_{\ell_1}^{\ell_2} (\check{\mathfrak{z}}_p \cdot \mathbf{w}_p + \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{w}'_p) dl + \int_{\ell_1}^{\ell_2} \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{w}_p - \mathbf{w}_t) dl, \end{aligned} \quad (6)$$

avendo posto

$$\mathbf{w}_t := \mathbf{w} + h \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \quad (7)$$

da interpretare come la velocità della faccia superiore della lamina di alluminio, sulla quale è incollata la lamina piezoelettrica, le cui posizioni siano date da

$$\mathbf{x}_t := \mathbf{x} + h \mathbf{a}. \quad (8)$$

Dal confronto della (5) con la (6) risulta che la decomposizione della potenza interna corrisponde alla seguente decomposizione della sollecitazione

$$\mathfrak{z} = \check{\mathfrak{z}} - \boldsymbol{\tau}, \quad (9a)$$

$$\mathfrak{z}_p = \check{\mathfrak{z}}_p + \boldsymbol{\tau}, \quad (9b)$$

$$\mathbf{z} = \check{\mathbf{z}} - h \mathbf{a} \times \boldsymbol{\tau}. \quad (9c)$$

In generale la *sollecitazione interlaminare*  $\boldsymbol{\tau}$  può avere una parte singolare al bordo che

conviene mettere in evidenza sostituendo alla (6) la seguente espressione

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(\text{int})}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}_p) &= \int_0^L (\check{\mathfrak{z}} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}' + \check{\mathfrak{z}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}') d\ell + \int_{\ell_1}^{\ell_2} (\check{\mathfrak{z}}_p \cdot \mathbf{w}_p + \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{w}'_p) d\ell \\ &+ \int_{\ell_1}^{\ell_2} \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{w}_p - \mathbf{w}_t) d\ell + \boldsymbol{\tau}_1(\ell_1) \cdot (\mathbf{w}_p(\ell_1) - \mathbf{w}_t(\ell_1)) + \boldsymbol{\tau}_2(\ell_2) \cdot (\mathbf{w}_p(\ell_2) - \mathbf{w}_t(\ell_2)). \end{aligned} \quad (10)$$

Richiedendo che, per ogni atto di moto in  $\mathcal{A}$ , sia

$$\mathcal{W}^{(\text{ext})} - \mathcal{W}^{(\text{int})} = 0, \quad (11)$$

si ottengono le equazioni di bilancio delle forze

$$\mathbf{b} - \mathfrak{z} - \mathbf{s}' = 0, \quad (12a)$$

$$\mathbf{c} - \mathbf{z} + \mathbf{m}' = 0, \quad (12b)$$

$$-\mathfrak{z}_p + \mathbf{s}'_p = 0, \quad (12c)$$

essendo definite le prime due negli intervalli  $]0, \ell_1[$  e  $] \ell_2, L[$ , l'ultima nell'intervallo  $] \ell_1, \ell_2[$ ,

assieme alle seguenti equazioni al bordo

$$\mathbf{s}(0) + \mathbf{s}_l = 0, \quad (13a)$$

$$-\mathbf{s}(\ell_1^-) + \mathbf{s}(\ell_1^+) + \boldsymbol{\tau}_1 = 0, \quad (13b)$$

$$-\mathbf{s}(\ell_2^-) + \mathbf{s}(\ell_2^+) + \boldsymbol{\tau}_2 = 0, \quad (13c)$$

$$-\mathbf{s}(L) + \mathbf{s}_r = 0, \quad (13d)$$

$$\mathbf{m}(0) + \mathbf{m}_l = 0, \quad (13e)$$

$$-\mathbf{m}(\ell_1^-) + \mathbf{m}(\ell_1^+) + h \mathbf{a}(\ell_1) \times \boldsymbol{\tau}_1 = 0, \quad (13f)$$

$$-\mathbf{m}(\ell_2^-) + \mathbf{m}(\ell_2^+) + h \mathbf{a}(\ell_2) \times \boldsymbol{\tau}_2 = 0, \quad (13g)$$

$$-\mathbf{m}(L) + \mathbf{m}_r = 0. \quad (13h)$$

Si assuma ora che per ogni atto di moto rigido sia nullo separatamente ciascuno dei termini della potenza interna (10), quello corrispondente alla lamina di alluminio, quello corrispondente alla lamina piezoelettrica e quello corrispondente alla interazione, per qualsiasi sottointervallo dei domini di parametrizzazione  $[0, L]$  e  $[\ell_1, \ell_2]$ .

Un atto di moto rigido è un atto di moto tale che

$$\mathbf{w}(\ell) = \bar{\mathbf{w}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}(\ell) - \bar{\mathbf{x}}), \quad (14a)$$

$$\mathbf{w}_p(\ell) = \bar{\mathbf{w}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}_p(\ell) - \bar{\mathbf{x}}), \quad (14b)$$

$$\mathbf{w}_t(\ell) = \bar{\mathbf{w}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}_t(\ell) - \bar{\mathbf{x}}). \quad (14c)$$

Affinché per qualsiasi atto di moto rigido sia

$$\check{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w}' + \check{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' = 0, \quad (15a)$$

$$\check{\mathbf{j}}_p \cdot \mathbf{w}_p + \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{w}'_p = 0, \quad (15b)$$

deve essere

$$\check{\mathbf{j}} = 0, \quad (16a)$$

$$\check{\mathbf{j}}_p = 0, \quad (16b)$$

$$\check{\mathbf{z}} + \mathbf{x}' \times \mathbf{s} = 0, \quad (16c)$$

$$\mathbf{x}'_p \times \mathbf{s}_p = 0, \quad (16d)$$

Affinché sia anche

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{w}_p - \mathbf{w}_t) = 0, \quad (17a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_1(\ell_1) \cdot (\mathbf{w}_p(\ell_1) - \mathbf{w}_t(\ell_1)) = 0, \quad (17b)$$

$$\boldsymbol{\tau}_2(\ell_2) \cdot (\mathbf{w}_p(\ell_2) - \mathbf{w}_t(\ell_2)) = 0, \quad (17c)$$

deve essere inoltre

$$(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_t) \times \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (18a)$$

$$(\mathbf{x}_p(\ell_1) - \mathbf{x}_t(\ell_1)) \times \boldsymbol{\tau}_1 = 0, \quad (18b)$$

$$(\mathbf{x}_p(\ell_2) - \mathbf{x}_t(\ell_2)) \times \boldsymbol{\tau}_2 = 0. \quad (18c)$$

Nei moti soggetti al vincolo di aderenza  $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_p$ , che qui interessano, le (18) sono banalmente soddisfatte, non ponendo alcuna condizione sulla sollecitazione interlaminare  $\boldsymbol{\tau}$  che assume carattere reattivo.

Introducendo le (16), assieme alle (9), nelle equazioni di bilancio (12) si ottiene

$$\mathbf{b} + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{s}' = 0, \quad (19a)$$

$$\mathbf{c} + \mathbf{x}' \times \mathbf{s} + h \mathbf{a} \times \boldsymbol{\tau} + \mathbf{m}' = 0, \quad (19b)$$

$$-\boldsymbol{\tau} + \mathbf{s}'_p = 0, \quad (19c)$$

nell'intervallo  $]l_1, l_2[$ , corrispondente al tratto in cui le due lamine sono sovrapposte, mentre negli intervalli  $]0, l_1[$  e  $]l_2, L[$  si ha

$$\mathbf{b} + \mathbf{s}' = 0, \quad (20a)$$

$$\mathbf{c} + \mathbf{x}' \times \mathbf{s} + \mathbf{m}' = 0. \quad (20b)$$

Per la sollecitazione  $\mathbf{s}_p$  deve essere data una prescrizione costitutiva rispettosa della (16d).

Il principio di bilancio (11) può essere esteso includendo una parte “elettrica”, come è descritto in [2] in un contesto più generale. Si adotta qui la forma sommaria più semplice adatta ad un continuo monodimensionale di cui sia parte una lamina piezoelettrica sottile, con elettrodi longitudinali continui. Si consideri, oltre alle funzioni (1), una coppia

$$\varphi^+ \in \mathbb{R}, \quad \varphi^- \in \mathbb{R}, \quad (21)$$

che descrive il *potenziale elettrico* in ciascuno degli elettrodi. Da tale coppia risulta definito

lo scalare

$$e := -(\varphi^+ - \varphi^-)/h_p, \quad (22)$$

*campo elettrico medio* nella lamina piezoelettrica. Oltre agli atti di moto (2), che svolgono il ruolo di *funzioni test* nel principio (11), si consideri una coppia di *potenziali test*

$$\psi^+ \in \mathbb{R}, \quad \psi^- \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Definite le funzioni

$$\mathcal{P}^{(\text{ext})}(\psi^+, \psi^-) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} (\beta^+ \psi^+ + \beta^- \psi^-) dl, \quad (24a)$$

$$\mathcal{P}^{(\text{int})}(\psi^+, \psi^-) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} D(\psi^+ - \psi^-) dl, \quad (24b)$$

in cui  $\beta^+$  e  $\beta^-$ , costanti in  $[\ell_1, \ell_2]$ , hanno il significato di densità di carica libera mentre  $D$ , costante in  $[\ell_1, \ell_2]$ , ha il significato di *spostamento elettrico medio*, si assuma che per una qualsiasi delle coppie (23) sia

$$\mathcal{P}^{(\text{ext})} - \mathcal{P}^{(\text{int})} = 0. \quad (25)$$

Ne deriva che

$$D = \beta^+, \quad D = -\beta^-. \quad (26)$$

## 2 Equazioni di bilancio in forma scalare

Si assume che la lamina di alluminio possa solo flettersi e che si possa utilizzare una descrizione del moto linearizzata in corrispondenza di una configurazione naturale rettilinea. Ponendo  $\mathbf{n} := \mathbf{x}'$ , lo spostamento  $\mathbf{u}(\ell, t) := \mathbf{x}(\ell, t) - \mathbf{x}(\ell, 0)$  si descrive attraverso le componenti  $u$  e  $v$  nella base  $\{\mathbf{n}(\ell, 0), \mathbf{a}(\ell, 0)\}$ , e il vettore  $\mathbf{a}(\ell, t)$  attraverso una rotazione di ampiezza  $\theta(\ell, t)$  del vettore  $\mathbf{a}(\ell, 0)$ . I vincoli di inestensibilità e di scorrimento nullo implicano

$$u' = 0, \quad v' = \theta. \quad (27)$$

Ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= p \mathbf{n} + q \mathbf{a}, \\ \mathbf{c} &= c \mathbf{n} \times \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= N \mathbf{n} + Q \mathbf{a}, \\ \mathbf{m} &= M \mathbf{n} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{s}_p &= N_p \mathbf{n}, \\ \boldsymbol{\tau} &= \tau \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (29)$$

alle equazioni (19) corrisponde la seguente versione scalare

$$p + \tau + N' = 0, \tag{30a}$$

$$q + Q' = 0, \tag{30b}$$

$$c + Q - h\tau + M' = 0, \tag{30c}$$

$$-\tau + N'_p = 0, \tag{30d}$$

mentre alle (20) corrispondono

$$p + N' = 0, \tag{31a}$$

$$q + Q' = 0, \tag{31b}$$

$$c + Q + M' = 0. \tag{31c}$$

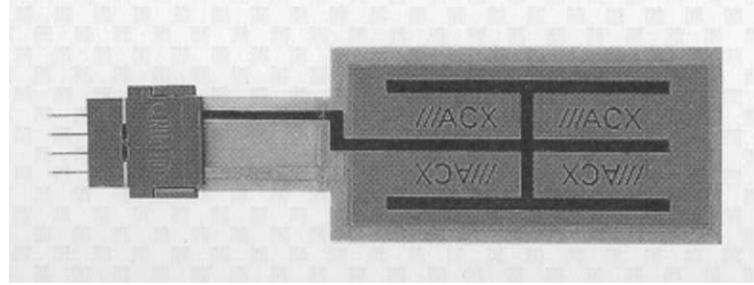


Figura 1: Attuatore piezoelettrico ACX modello QP10N.

### 3 La lamina piezoelettrica

La lamina piezoelettrica, riportata in Fig. 1, è costituita da un sottile strato di materiale piezoelettrico tra due facce rivestite di un conduttore (elettrodo). Si assume la seguente forma monodimensionale della prescrizione costitutiva

$$N_p = b \varepsilon_p + a h_p e, \quad (32a)$$

$$D = -a \varepsilon_p + c h_p e, \quad (32b)$$

dove con  $e$  si è indicato il campo elettrico e con  $\varepsilon_p$  l'allungamento unitario nella lamina piezoelettrica che, per la condizione di aderenza, risulta

$$\varepsilon_p = -h v''. \quad (33)$$

La differenza di potenziale tra gli elettrodi, indicando con  $h_p$  la distanza tra essi, è

$$V = -h_p e. \quad (34)$$

I valori delle costanti utilizzati sono i seguenti:  $a = 0.220017 \text{ N V}^{-1}$ ,  $b = 299401.0 \text{ N}$ ,  $c = 1.398246759 \times 10^{-6} \text{ N V}^{-2}$ ,  $h_p = 0.000254\text{m}$ .

## 4 Equazioni del moto

Assumendo  $M = YJ v''$ , indicando con  $\rho$  e  $\rho_p$  rispettivamente la densità di massa per unità di lunghezza della lamina di alluminio e della lamina piezoelettrica e considerando nullo il momento delle forze di inerzia, tranne che per l'accelerometro, le equazioni del moto risultano

$$YJ v'''' + \rho \ddot{v} = 0, \quad \text{in } ]0, \ell_1[ \quad (35a)$$

$$YJ v'''' - h N_p'' + (\rho + \rho_p) \ddot{v} = 0, \quad \text{in } ]\ell_1, \ell_2[ \quad (35b)$$

$$YJ v'''' + \rho \ddot{v} = 0, \quad \text{in } ]\ell_2, L[. \quad (35c)$$

Le equazioni al bordo e di continuità corrispondenti alle (13) risultano

$$YJ v'''(\ell_1^-) - YJ v'''(\ell_1^+) + h N_p'(\ell_1^+) = 0, \quad (36a)$$

$$YJ v'''(\ell_2^-) - YJ v'''(\ell_2^+) - h N_p'(\ell_2^-) = 0, \quad (36b)$$

$$-YJ v''(\ell_1^-) + YJ v''(\ell_1^+) - h N_p(\ell_1^+) = 0, \quad (36c)$$

$$-YJ v''(\ell_2^-) + YJ v''(\ell_2^+) + h N_p(\ell_2^-) = 0, \quad (36d)$$

$$YJ v'''(L) + YJ \frac{m_a}{\rho} v''''(L) = 0, \quad (36e)$$

$$YJ v''(L) - YJ \frac{m_a}{\rho} h_a^2 v''''(L) = 0, \quad (36f)$$

dove  $m_a$  è la massa dell'accelerometro e  $h_a$  la sua eccentricità. A queste vanno aggiunte le condizioni di continuità di  $v$  e di  $v'$ . I valori delle costanti sono i seguenti:  $YJ = 4.58627 \text{ N m}^2$ ,

$\rho = 0.2236 \text{ Kg m}^{-1}$ ,  $\rho_p = 0.081 \text{ Kg m}^{-1}$ ,  $m_a = 0.02 \text{ Kg}$ ,  $h_a = 0.01 \text{ m}$ ,  $L = 0.505 \text{ m}$ ,  
 $\ell_1 = 0.0675 \text{ m}$ ,  $\ell_2 = 0.1025 \text{ m}$ ,  $h = 0.0015875 \text{ m}$ . Lo spessore della lamina di alluminio è  $2h$ .

## 5 Oscillazioni indotte da uno shaker

La lamina di alluminio ha una estremità fissata su uno shaker a cui è inviato un segnale sinusoidale di ampiezza e frequenza fissate. Per diverse frequenze, viene misurata la differenza di potenziale tra gli elettrodi della lamina piezoelettrica, che svolge in questo caso la funzione di sensore. Essendo la carica libera sugli elettrodi nulla, dalle (32) si ha

$$V = -\frac{a}{c} \varepsilon_p, \quad (37)$$

$$N_p = \left(b + \frac{a^2}{c}\right) \varepsilon_p, \quad (38)$$

Sostituita la (38) nelle (36), assieme alla (33), la risposta del modello è stata ottenuta come sovrapposizione della risposta modale. Sono stati considerati i primi 13 modi. Le frequenze e le lunghezze d'onda corrispondenti sono riportate in Tab. 1. I coefficienti di smorzamento sono stati determinati per ciascun modo dalla risposta sperimentale.

In Fig.2 e Fig. 3 è riportata la differenza di potenziale corrispondente ad una accelerazione di ampiezza  $10^{-3}m/s^2$  alla testa dello shaker. La diversità della risposta in prossimità della prima frequenza di risonanza è da attribuire ad una oscillazione laterale dell'asse dello shaker, che non è stato possibile eliminare.

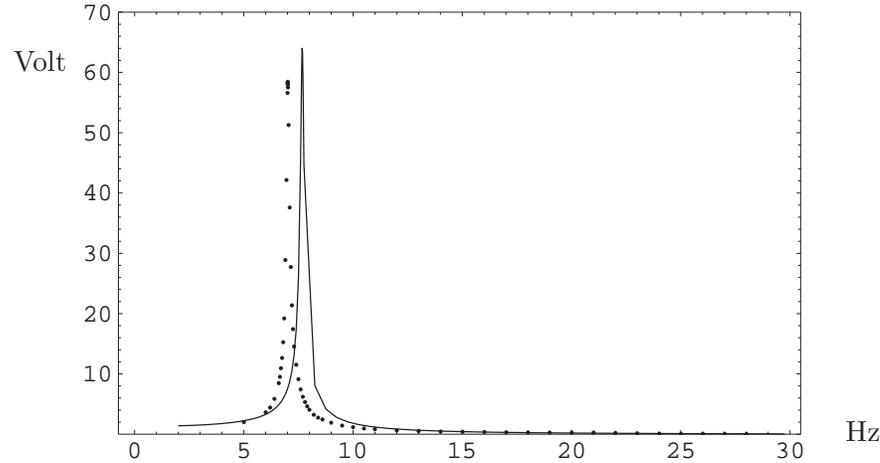


Figura 2: Differenza di potenziale nella lamina piezoelettrica nelle oscillazioni indotte dallo shaker: risposta misurata (punti) e risposta calcolata (linea) nell'intervallo 0–30 Hz.

## 6 Oscillazioni indotte dalla lamina piezoelettrica

La lamina di alluminio ha una estremità fissata sul banco di misura. Agli elettrodi della lamina piezoelettrica, che svolge in questo caso la funzione di attuatore, è assegnata una differenza di potenziale sinusoidale di ampiezza 100 V, con diversi valori della frequenza. È misurata la accelerazione all'estremità libera. Dalle (32) e (34) si ha

$$N_p = b \varepsilon_p - a V, \quad (39)$$

essendo  $V$  la differenza di potenziale applicata. Sostituita questa espressione nelle (36), assieme alla (33), la risposta del modello è stata ottenuta come sovrapposizione della risposta modale. Sono stati considerati i primi 13 modi. Le frequenze e le lunghezze d'onda corrispondenti sono riportate nelle ultime due colonne in Tab. 1. Si noti come le frequenze risultino in questo caso

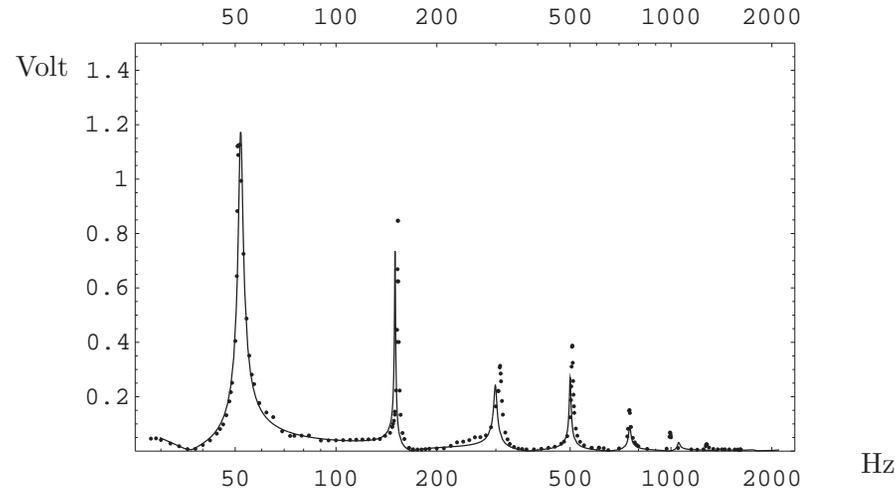


Figura 3: Differenza di potenziale nella lamina piezoelettrica nelle oscillazioni indotte dallo shaker: risposta misurata (punti) e risposta calcolata (linea) nell'intervallo 30–2000 Hz.

inferiori a quelle calcolate per la lamina eccitata dallo shaker, mancando l'effetto irrigidente che risulta dalla (38). La risposta, in termini di valori massimi dell'ampiezza dell'accelerazione per diversi valori della frequenza, è riportata in Fig. 4 e in Fig. 6. In Fig. 5 le ampiezze massime calcolate per lo spostamento sono confrontate con i valori misurati della accelerazione divisi per il quadrato della pulsazione.

Si noti come le frequenze di risonanza più alte misurate siano diverse da quelle calcolate. Si può supporre che queste differenze possano essere ridotte attraverso una identificazione più accurata del modulo di rigidezza  $YJ$  e della densità di massa della lamina di alluminio, della massa dell'accelerometro, della sua posizione e della sua eccentricità. Anche la diversità delle ampiezze della risposta alle frequenze più alte si può supporre che sia riconducibile ai valori scelti

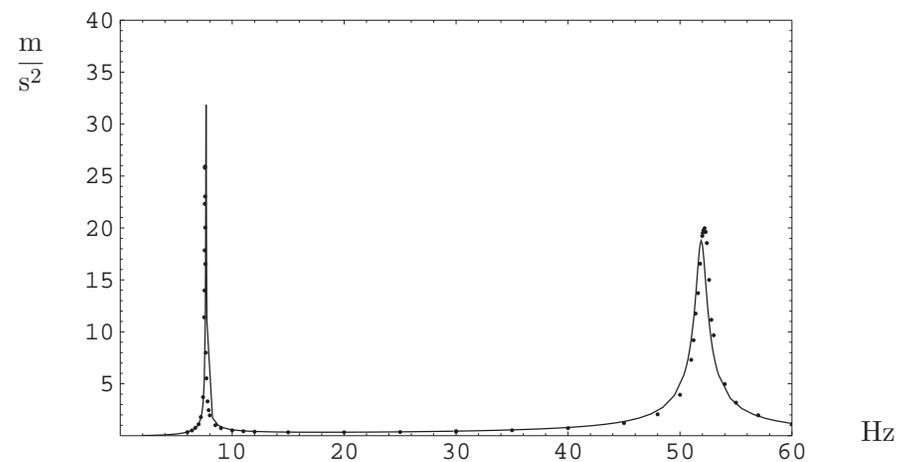


Figura 4: Accelerazione all'estremità libera nelle oscillazioni indotte dalla lamina piezoelettrica: risposta misurata (punti) e risposta calcolata (linea) nell'intervallo 0–60 Hz.

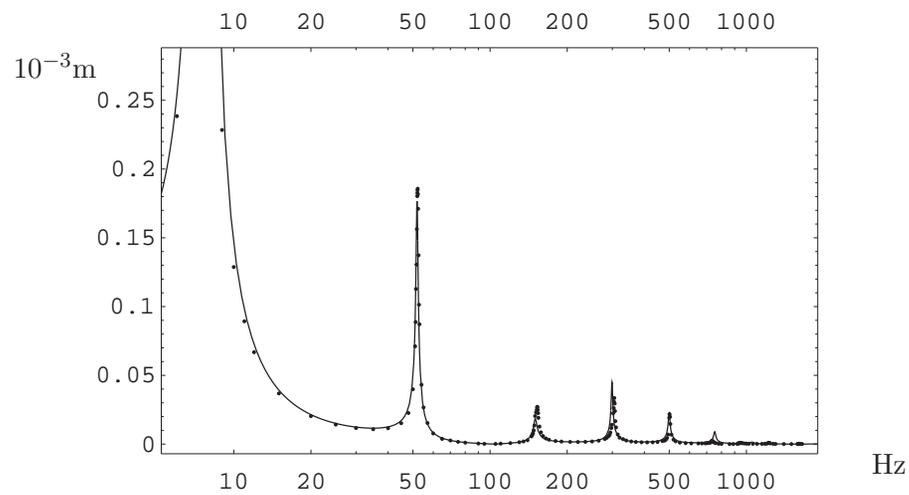


Figura 5: Spostamento all'estremità libera nelle oscillazioni indotte dalla lamina piezoelettrica: risposta misurata (punti) e risposta calcolata (linea) nell'intervallo 0–2000 Hz.

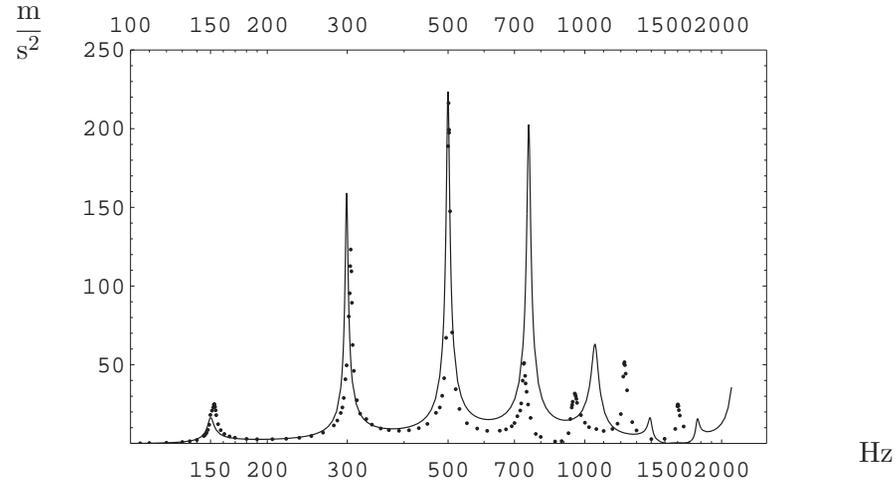


Figura 6: Accelerazione all'estremità libera nelle oscillazioni indotte dalla lamina piezoelettrica: risposta misurata (punti) e risposta calcolata (linea) nell'intervallo 60–2000 Hz.

n	$\nu$ (S)	$\lambda$ (S)	$\nu$ (P)	$\lambda$ (P)
1	7.67467	1.925559	7.66620	1.926623
2	51.9047	0.740429	51.8965	0.740488
3	150.043	0.435490	150.030	0.435509
4	299.138	0.308426	298.975	0.308510
5	500.141	0.238529	499.718	0.238630
6	753.067	0.194388	752.540	0.194456
7	1053.66	0.164337	1053.28	0.164367
8	1393.61	0.142895	1393.36	0.142907
9	1767.59	0.126881	1767.12	0.126898
10	2181.56	0.114210	2180.42	0.114239
11	2649.41	0.103636	2647.51	0.103674
12	3180.49	0.094589	3178.24	0.094622
13	3774.36	0.086829	3772.18	0.086854

Tabella 1: Frequenze  $\nu$  e lunghezze d'onda  $\lambda$  nelle oscillazioni indotte dallo shaker (S) o dalla lamina piezoelettrica (P): valori calcolati per i primi 13 modi.

per i parametri costituiti della lamina piezoelettrica, alla sua lunghezza e alla sua posizione, ma è anche ragionevole supporre che essa sia prima di tutto da attribuire alla sommarietà del modello adottato.

## Riferimenti bibliografici

- [1] A. DiCarlo, *A non-standard format for continuum mechanics*, pp. 263–268 of Contemporary Research in the Mechanics and Mathematics of Materials (R. C. Batra and M. F. Beatty, eds.). CIMNE, Barcelona (1996).
- [2] V. Nicotra and P. Podio Guidugli, *Piezoelectric Plates with Changing Thickness*, (1998)
- [3] J.S. Yang, R.C. Batra and X.Q. Liang, The Vibration of a Simply Supported Rectangular Elastic Plate Due to Piezoelectric Actuators, *Int.J. Solids & Structures*, (1997)