Esercizi

1. Applicare l'*eliminazione di Gauss* per risolvere il sistema di equazioni $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}$ con

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 10 & 1 & -5 \\ -20 & 3 & 20 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Calcolare anche la matrice $\mathbf{L}$.

2. Calcolare le matrici $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ corrispondenti a ciascuna delle seguenti matrici

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} 10 & 1 & -5 \\ -20 & 3 & 20 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(b) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 8 & 11 & 24 \\ 6 & 17 & 26 \end{pmatrix}$$

$$(d) \qquad \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 9 & 21 & 1 \\ 12 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(e) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(f) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Si considerino le trasformazioni lineari $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ definite, nelle basi $\{b_1, \ldots, b_6\}$ di $\mathcal{U}$ e $\{d_1, d_2, d_3\}$ di $\mathcal{V}$, dalle matrici

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Costruire una base per $\ker A$ e una base per $\operatorname{im} A$ utilizzando la *eliminazione di Gauss*.

4. Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine delle trasformazioni lineari definite dalle seguenti matrici

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(b) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

utilizzando la *eliminazione di Gauss*.

5. Si consideri la trasformazione lineare $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita, nella base standard, dalla matrice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Riferendosi al prodotto interno standard di $\mathbb{R}^2$ ed alla norma corrispondente calcolare $\|\mathbf{A}\|$ e $\|\mathbf{A}^{-1}\|$. Si osservi che l'insieme dei vettori in $\mathbb{R}^2$ aventi norma unitaria può essere descritto in forma parametrica con

$$\mathbf{u}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \in [-\pi, \pi[$$

6. Si consideri la trasformazione lineare $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita, nella base standard, dalla matrice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare le matrici $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}$ definite dalla *eliminazione di Gauss*. Si consideri poi la trasformazione lineare M definita dalla matrice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 10^{-5} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare le matrici $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ definite dalla *eliminazione di Gauss*, con scambio delle righe e senza scambio delle righe. Calcolare il numero di condizionamento κ, corrispondente al prodotto interno standard di $\mathbb{R}^2$, di $\mathbf{A}$ e anche di $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$.

7. Si consideri la trasformazione lineare $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ definita, nelle basi $\{b_1, b_2, b_3\}$ di $\mathcal{U}$ e $\{d_1, d_2, d_3\}$ di $\mathcal{V}$, dalla matrice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lo spazio $\mathcal{V}$ sia dotato di prodotto interno tale che la base $\{d_1, d_2\, d_3\}$ sia ortonormale. Costruire una diversa base ortonormale di $\mathcal{V}$ tale che la matrice di A risulti triangolare superiore (con la *fattorizzazione di Givens* o con la *fattorizzazione di Householder*).

8. Si applichi la *fattorizzazione di Givens* alle seguenti matrici

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Determinare una base dell'immagine delle trasformazioni lineari definite dalle seguenti matrici

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

utilizzando la *fattorizzazione di Givens*.

10. Si consideri la trasformazione lineare $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ definita, nelle basi $\{b_1, \dots, b_6\}$ di $\mathcal{U}$ e $\{d_1, d_2, d_3\}$ di $\mathcal{V}$, dalla matrice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli spazi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ siano dotati di prodotto interno in modo che le basi $\{b_1, \dots, b_6\}$, $\{d_1, d_2\, d_3\}$ siano ortonormali. Costruire una base ortonormale per $\ker A$ e una base ortonormale per $\operatorname{im} A$ utilizzando la *fattorizzazione di Givens* o la *fattorizzazione di Householder*.

11. Sia $\{b_1, b_2, b_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$. Definito un prodotto interno nel modo seguente

$$\langle b_1\,, b_1 \rangle = 4$$
$$\langle b_1\,, b_2 \rangle = 2$$
$$\langle b_1\,, b_3 \rangle = 1$$
$$\langle b_2\,, b_2 \rangle = 4$$
$$\langle b_2\,, b_3 \rangle = 1$$
$$\langle b_3\,, b_3 \rangle = 4$$

costruire una base ortonormale usando l'algoritmo di *ortogonalizzazione di Schmidt*.

12. Assegnata la base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$, costruire una base ortonormale, nel prodotto interno standard, usando l'algoritmo di *ortogonalizzazione di Schmidt*.

13. Applicare la *fattorizzazione di Cholesky* alle seguenti matrici

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 20 & 22 \\ 5 & 22 & 70 \end{pmatrix}$$

$$(b) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 13 & 5 \\ 1 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

14. Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si confronti la matrice $\mathbf{U}$ ottenuta dalla applicazione della *fattorizzazione di Givens* con quella ottenuta applicando la *fattorizzazione di Cholesky* alla matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

15. Si consideri, in uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno, il sottospazio U generato dal vettore u definito, nella base ortonormale $\{b_1, b_2, b_3\}$, dalle componenti

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando *la fattorizzazione di Givens* si costruisca una base di $\mathrm{U}^\perp$.

16. Si consideri l'endomorfismo $A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ definito, in una base ortonormale, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcolare l'autovalore più grande e l'autovalore più piccolo in modulo e un vettore di ciascuno degli autospazi corrispondenti usando il *metodo delle potenze* e la *iterazione inversa*.

17. Si consideri l'endomorfismo $A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ definito, in una base ortonormale, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dopo aver calcolato gli autovalori fattorizzando il polinomio caratteristico, calcolare una base in ciascun autospazio usando la *iterazione inversa*.

18. Si consideri l'endomorfismo $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ definito, in una base ortonormale, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 3.5 & -6 & 5 \\ -6 & 8.5 & -9 \\ 5 & -9 & 8.5 \end{pmatrix}$$

Calcolare l'autovalore più grande e l'autovalore più piccolo in modulo e un vettore di ciascuno degli autospazi corrispondenti usando il *metodo delle potenze* e la *iterazione inversa*. Calcolare l'autovalore intermedio costruendo una successione di vettori ortogonali all'autospazio corrispondente ad uno degli altri autovalori.

19. Si consideri l'endomorfismo $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ definito, in una base ortonormale, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcolare la matrice corrispondente ad una base di Hessenberg, poi applicare la *fattorizzazione di Givens* per calcolare le matrici $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{U}$. Calcolare infine il prodotto $\mathbf{UQ}$.

20. Si consideri l'endomorfismo $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ definito, in una base ortonormale, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0.6532 & 0.2165 & 0.0031 \\ 0.2165 & 0.4105 & 0.0052 \\ 0.0031 & 0.0052 & 0.2132 \end{pmatrix}$$

Calcolare tutti gli autovalori di A con l'*algoritmo di Jacobi*.