Forma triangolare

Sia A un endomorfismo di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ di dimensione n, definito su $\mathbb{C}$ e dotato di prodotto interno.

Si dimostra[1] che esistono $n+1$ sottospazi $\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n$, tali che

(i) ciascun sottospazio U_i è invariante rispetto ad A;

(ii) $\dim \mathrm{U}_i = i$;

(iii) $\{o\} = \mathrm{U}_0 \subset \mathrm{U}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{U}_n = \mathcal{U}$.

Il sottospazio U_0 è banalmente invariante rispetto ad A e ha dimensione 0, mentre gli altri sottospazi risultano definiti nel seguente modo.

Poiché in $\mathcal{U}$ esiste almeno un autospazio di A^*, si consideri un sottospazio V_1 di questo di dimensione 1. Risulta allora che

- V_1 è invariante rispetto ad A^*;
- $\dim \mathrm{V}_1^\perp = n-1$;
- $\mathrm{V}_1^\perp$ è invariante rispetto ad A.

Le prime due proprietà sono banali. Per la terza si osservi che

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{V}_1, v \in \mathrm{V}_1^\perp \quad &\Rightarrow \quad \langle A^* u\,, v\rangle = 0 \\ \langle A^* u\,, v\rangle = \langle u\,, Av\rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad Av \in \mathrm{V}_1^\perp \end{aligned}$$

Si ponga $\mathrm{U}_{n-1} := \mathrm{V}_1^\perp$ e si consideri, invece di A, la restrizione di A al sottospazio U_{n-1}.

Si applichi la procedura già descritta a U_{n-1} e così via sino ad ottenere $\mathrm{U}_1 := \mathrm{V}_{n-1}^\perp$, risultando ciascun sottospazio U_i invariante rispetto ad A.

È bene notare che, poiché l'endomorfismo aggiunto della restrizione di A a U_{n-1} non è in generale la restrizione di A^*, non si costruisce in questo modo una decomposizione spettrale di $\mathcal{U}$.

Alla esistenza dei sottospazi invarianti U_i appena dimostrata corrisponde la esistenza di una base ortonormale $\{b_1 \ldots b_n\}$ in cui la matrice di A risulta triangolare. Si può infatti costruire tale base scegliendo $b_1 \in \mathrm{U}_1$, $b_2 \in (\mathrm{U}_2 \cap \mathrm{U}_1^\perp)$, e così via, risultando infine

$$\begin{aligned} Ab_1 &= a_{11} b_1 \\ Ab_2 &= a_{12} b_1 + a_{22} b_2 \\ &\ldots \\ Ab_n &= a_{1n} b_1 + \ldots + a_{nn} b_n \end{aligned}$$

Indicando con P_i la proiezione ortogonale su U_i, si noti che il vettore b_1 risulta essere un autovettore di A; b_2 un autovettore di $(I-P_1)A|_{\mathrm{U}_1^\perp}$; b_3 un autovettore di $(I-P_2)A|_{\mathrm{U}_2^\perp}$ ecc. Questo mette in evidenza che la costruzione degli stessi spazi U_i avrebbe potuto procedere da U_1 sino a U_n, considerando un autospazio di A e poi un autospazio di ciascuno degli endomorfismi $(I-P_i)A|_{\mathrm{U}_i^\perp}$.

---

[1] Il teorema che viene presentato è tratto da: Halmos P.R., *Finite Dimentional Vector Spaces*, Springer–Verlag, 1974. Le proprietà da esso enunciate sono necessarie alla comprensione delle proprietà di convergenza dell'*algoritmo QR*.