Fattorizzazione di Givens

Si consideri una trasformazione lineare $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ tra due spazi vettoriali definiti su $\mathbb{R}$ aventi la stessa dimensione. Lo spazio $\mathcal{V}$ sia inoltre dotato di prodotto interno.

Sia $\{b_1 \dots b_n\}$ una base di $\mathcal{U}$ e $\{d_1 \dots d_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$.

Si mostra come è possibile costruire una base di $\mathcal{V}$ attraverso una successione di rotazioni dei vettori della base originaria in modo tale che la matrice di A risulti triangolare superiore.

Considerando per primo il vettore Ab_1 si modifichi la base di $\mathcal{V}$ eseguendo:

(1.2) una rotazione nel sottospazio generato dal *primo* e dal *secondo* vettore della base, in modo che il *secondo* vettore diventi ortogonale al vettore Ab_1;

(1.3) una rotazione nel sottospazio generato dal *primo* e dal *terzo* vettore della base appena ottenuta, in modo che il *terzo* vettore diventi ortogonale al vettore Ab_1;

(...) ...

(1.n) una rotazione nel sottospazio generato dal *primo* e dall'*n–esimo* vettore dell'ultima base ottenuta, in modo che il vettore *n–esimo* diventi ortogonale al vettore Ab_1.

Si ottiene in tal modo una base caratterizzata dal fatto che il vettore Ab_1 risulta ortogonale ai vettori della base dal *secondo* in poi. Il vettore Ab_1 è dunque parallelo al *primo* vettore della base. La prima colonna della matrice di A avrà pertanto elementi nulli al di sotto della diagonale.

Si consideri poi il vettore Ab_2 e si modifichi la base eseguendo:

(2.3) una rotazione nel sottospazio generato dal *secondo* e dal *terzo* vettore della base, in modo che il *terzo* vettore diventi ortogonale al vettore Ab_2;

(2.4) una rotazione nel sottospazio generato dal *secondo* e dal *quarto* vettore della base appena ottenuta, in modo che il *quarto* vettore diventi ortogonale al vettore Ab_2;

(...) ...

(2.n) una rotazione nel sottospazio generato dal *secondo* e dall'*n–esimo* vettore dell'ultima base ottenuta, in modo che il vettore *n–esimo* diventi ortogonale al vettore Ab_2.

Si ottiene in tal modo una base tale che il vettore Ab_2 risulta ortogonale ai vettori della base dal *terzo* in poi. Il vettore Ab_2 appartiene dunque al sottospazio generato dal *primo* e dal *secondo* vettore della base. La seconda colonna della matrice di A avrà pertanto elementi nulli al di sotto della diagonale.

Proseguendo si ottiene infine una matrice triangolare superiore.

La generica rotazione R nel sottospazio V generato dalla coppia di vettori d_p, d_q, è definita, nella base $\{d_p, d_q\}$, dalla matrice

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

I corrispondenti vettori della nuova base risultano

$$\acute{d}_p := Rd_p = \cos\theta\, d_p + \sin\theta\, d_q$$
$$\acute{d}_q := Rd_q = -\sin\theta\, d_p + \cos\theta\, d_q$$

A tale cambiamento di base corrispondono nuove componenti rispetto ai vettori *p–esimo* e *q–esimo*. Da questo deriva che, indicando con a_{ij} gli elementi della matrice di A prima della rotazione dei vettori della base, le righe di indici p e q della nuova matrice risultano definite dalle espressioni seguenti

$$\begin{aligned} \acute{a}_{pi} &:= a_{pi}\cos\theta\, + a_{qi}\sin\theta \\ \acute{a}_{qi} &:= -a_{pi}\sin\theta\, + a_{qi}\cos\theta \end{aligned}$$

rimanendo immutate tutte le altre righe.
La condizione di ortogonalità

$$\langle Ab_p\,, \acute{d}_q\rangle = -a_{pp}\sin\theta\, + a_{qp}\cos\theta\, = 0$$

si realizza ponendo $c := (a_{pp}^2 + a_{qp}^2)^{1/2}$ e assumendo, nel caso $c \neq 0$,

$$\begin{aligned} \cos\theta\, &= a_{pp}/c \\ \sin\theta\, &= a_{qp}/c \end{aligned}$$

Si noti infine che, facendo riferimento alla decomposizione ortogonale

$$\mathcal{V} = \mathrm{V} \oplus \mathrm{V}^{\perp}$$

la rotazione $R : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ può essere vista come una rotazione di $\mathcal{V}$ tale che

$$\begin{aligned} &\forall v \in \mathrm{V} \quad v \mapsto Rv \\ &\forall w \in \mathrm{V}^{\perp} \quad w \mapsto w \end{aligned}$$

La composizione Q di tutte le rotazioni eseguite in $\mathcal{V}$ è anch'essa una rotazione. Indicando con $\mathbf{Q}$ la matrice di Q e con $\mathbf{A}$ la matrice di A corrispondenti alla base iniziale, con $\mathbf{U}$ la matrice (triangolare superiore) di A corrispondente alla base finale, risulta[1]

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{U}$$

[1] L'algoritmo descritto può essere utilizzato per risolvere un sistema di equazioni lineari $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, calcolando per prima cosa il vettore che corrisponde a $\mathbf{b}$ nella nuova base, $\mathbf{y} := \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, e poi, con una *sostituzione all'indietro*, il vettore $\mathbf{x} := \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$.