Algoritmo di Jacobi

Sia A un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ definito su $\mathbb{R}$ e dotato di prodotto interno.

Sia $\{b_1 \dots b_n\}$ una base ortonormale e $\mathbf{A}$ la matrice, simmetrica, di A.

Poiché l'endomorfismo A può essere espresso come combinazione lineare di proiezioni ortogonali, esiste una base ortonormale in cui la matrice di A è diagonale. Si dimostra che è possibile "raggiungere" una tale base attraverso una successione di rotazioni della base originaria.

Indicando con U il sottospazio generato dai vettori b_p e b_q, si consideri la rotazione

$$R : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$$

definita, nella base $\{b_p, b_q\}$, dalla matrice

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Applicando R ai vettori b_p e b_q si ottiene un'altra base ortonormale con

$$\begin{aligned} \acute{b}_p &:= Rb_p = \cos\theta\, b_p + \sin\theta\, b_q \\ \acute{b}_q &:= Rb_q = -\sin\theta\, b_p + \cos\theta\, b_q \end{aligned}$$

Il cambiamento di base consistente nella sostituzione di b_p e b_q con $\acute{b}_p$ e $\acute{b}_q$ si riflette sulla matrice di A nel modo seguente.

Se v è un generico vettore di $\mathcal{U}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{v} &= v_p b_p + v_q b_q + \sum_{h\neq p,q} v_h b_h = \acute{v}_p \acute{b}_p + \acute{v}_q \acute{b}_q + \sum_{h\neq p,q} v_h b_h \\ &= (v_p \cos\theta\, + v_q \sin\theta\,)\acute{b}_p + (-v_p \sin\theta\, + v_q)\acute{b}_q + \sum_{h\neq p,q} v_h b_h \end{aligned}$$

Da questo deriva, indicando con a_{ij} gli elementi della matrice di A,

$$Ab_i = (a_{pi}\cos\theta\, + a_{qi}\sin\theta\,)\acute{b}_p + (-a_{pi}\sin\theta\, + a_{qi}\cos\theta\,)\acute{b}_q + \sum_{h\neq p,q} a_{hi} b_h$$

In particolare si ha

$$\begin{aligned} A\acute{b}_p =& A(\cos\theta\, b_p + \sin\theta\, b_q) = \cos\theta\, Ab_p + \sin\theta\, Ab_q \\ =& ((a_{pp} - a_{qq})\cos^2\theta\, + 2a_{pq}\cos\theta\,\sin\theta\, + a_{qq})\acute{b}_p \\ &+ (2a_{pq}\cos^2\theta\, + (a_{qq} - a_{pp})\cos\theta\,\sin\theta\, - a_{pq})\acute{b}_q \\ &+ \sum_{h\neq p,q} (a_{hp}\cos\theta\, + a_{hq}\sin\theta\,) b_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\acute{b}_q =& A(-\sin\theta\, b_p + \cos\theta\, b_q) = -\sin\theta\, Ab_p + \cos\theta\, Ab_q \\ =& (2a_{pq}\cos^2\theta\, + (a_{qq} - a_{pp})\cos\theta\,\sin\theta\, - a_{pq})\acute{b}_p \\ &+ ((a_{qq} - a_{pp})\cos^2\theta\, - 2a_{pq}\cos\theta\,\sin\theta\, + a_{pp})\acute{b}_q \\ &+ \sum_{h\neq p,q} (-a_{hp}\sin\theta\, + a_{hq}\cos\theta\,) b_h \end{aligned}$$

Indicando con $\acute{a}_{ij}$ gli elementi della matrice di A nella nuova base, risulta dunque per $i \neq p, q$

$$\begin{aligned}
\acute{a}_{pi} &:= a_{pi} \cos\theta \, + a_{qi} \sin\theta \\
\acute{a}_{qi} &:= -a_{pi} \sin\theta \, + a_{qi} \cos\theta \\
\acute{a}_{ip} &:= \acute{a}_{pi} \\
\acute{a}_{iq} &:= \acute{a}_{qi}
\end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
\acute{a}_{pp} &:= (a_{pp} - a_{qq}) \cos^2\theta \, + 2a_{pq} \cos\theta \, \sin\theta \, + a_{qq} \\
&= \frac{(a_{pp} - a_{qq})}{2} \cos 2\theta \, + a_{pq} \sin 2\theta \, + (a_{pp} + a_{qq}) \\
\acute{a}_{qq} &:= (a_{qq} - a_{pp}) \cos^2\theta \, - 2a_{pq} \cos\theta \, \sin\theta \, + a_{pp} \\
&= \frac{(a_{qq} - a_{pp})}{2} \cos 2\theta \, - a_{pq} \sin 2\theta \, + (a_{pp} + a_{qq}) \\
\acute{a}_{pq} &:= 2a_{pq} \cos^2\theta \, + (a_{qq} - a_{pp}) \cos\theta \, \sin\theta \, - a_{pq} \\
&= a_{pq} \cos 2\theta \, + \frac{(a_{qq} - a_{pp})}{2} \sin 2\theta \\
\acute{a}_{qp} &:= \acute{a}_{pq}
\end{aligned}$$

Si scelga θ in modo tale che sia $\acute{a}_{pq} = 0$, osservando che

$$\begin{aligned}
&(a_{qq} - a_{pp}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta := \frac{\pi}{4} \\
&(a_{qq} - a_{pp}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tan 2\theta := \frac{2a_{pq}}{(a_{pp} - a_{qq})} \qquad |\theta| < \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Si prosegua con rotazioni successive scegliendo le coppie p, q tali che sia $a_{pq} \neq 0$. Si genera in tal modo una successione di matrici. Tale successione ha come limite una matrice diagonale. Infatti la somma dei quadrati di tutti gli elementi di ciascuna matrice risulta costante, mentre la somma dei quadrati dei termini della diagonale risulta crescente. Per dimostrare questa proprietà è sufficiente osservare che

$$\begin{array}{lll}
i \neq p, q & j \neq p, q & \acute{a}_{ij} = a_{ij} \\
 & j \neq p, q & \acute{a}_{pj}^2 + \acute{a}_{qj}^2 = a_{pj}^2 + a_{qj}^2 \\
 & i \neq p, q & \acute{a}_{ip}^2 + \acute{a}_{iq}^2 = a_{ip}^2 + a_{iq}^2 \\
 & & \acute{a}_{pp}^2 + \acute{a}_{qq}^2 = a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2 \\
 & & \acute{a}_{pq} = 0
\end{array}$$

Da queste relazioni deriva infatti che

$$\sum_i \sum_j \acute{a}_{ij}^2 = \sum_{i \neq p,q} \sum_{j \neq p,q} \acute{a}_{ij}^2 + \sum_{j \neq p,q} (\acute{a}_{pj}^2 + \acute{a}_{qj}^2) + \sum_{i \neq p,q} (\acute{a}_{ip}^2 + \acute{a}_{iq}^2) + \acute{a}_{pp}^2 + \acute{a}_{qq}^2 = \sum_i \sum_j a_{ij}^2$$

$$\sum_i \acute{a}_{ii}^2 = \sum_{i \neq p,q} \acute{a}_{ii}^2 + \acute{a}_{pp}^2 + \acute{a}_{qq}^2 = \sum_{i \neq p,q} a_{ii}^2 + a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2 = \sum_i a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$$

I valori degli indici p e q vengono usualmente scelti in modo da selezionare i termini a_{pq} partendo dalla prima riga, da sinistra verso destra, e proseguendo con le righe successive.