Costruzione del nucleo e dell'immagine

Si consideri una trasformazione lineare $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ tra due spazi vettoriali definiti su $\mathbb{R}$ e dotati di prodotto interno.

Sia $\{b_1 \dots b_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{U}$, $\{d_1 \dots d_m\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$ e $\mathbf{A}$ la corrispondente matrice di A.

Si mostra come sia possibile costruire delle basi ortonormali per $\operatorname{im} A$ e $(\operatorname{im} A)^\perp$ utilizzando la *fattorizzazione di Givens* o la *fattorizzazione di Householder*.

(1) Si modifichi la base di $\mathcal{V}$ in modo che Ab_1 risulti parallelo al primo vettore della base.

(2) Si modifichi poi la base appena costruita in modo che Ab_2 risulti essere un vettore del sottospazio generato dai primi due vettori della base. Se accade che Ab_2 risulta parallelo al primo vettore della base, si modifichi la base di $\mathcal{U}$ spostando b_2 all'ultimo posto e si ripeta la procedura con il nuovo vettore Ab_2.

(3) Si modifichi ancora la base di $\mathcal{V}$ in modo che Ab_3 risulti essere un vettore del sottospazio generato dai primi tre vettori della base. Se accade che Ab_3 risulta essere un vettore del sottospazio generato dai primi due vettori della base, si modifichi la base di $\mathcal{U}$ spostando b_3 all'ultimo posto e si ripeta la procedura con il nuovo vettore Ab_3.

(...) Si prosegua in modo da considerare ciascuno degli n vettori Ab_i una sola volta.

Indicando con $\mathbf{P}$ la matrice che ha per colonne le componenti dei vettori della nuova base di $\mathcal{U}$, ottenuta riordinando i vettori della base originaria, e con $\mathbf{Q}$ la matrice che ha per colonne le componenti dei vettori della nuova base di $\mathcal{V}$, risulta

$$\mathbf{AP} = \mathbf{QU}$$

essendo $\mathbf{U}$ la matrice di A nelle nuove basi.

Si noti che la matrice $\mathbf{U}$ è caratterizzata dal fatto che i suoi elementi u_{ij} sono tali che

$$i > j \quad \Rightarrow \quad u_{ij} = 0$$

e che esiste r tale che

$$i \le r \quad \Rightarrow \quad u_{ii} \ne 0$$

Se $r < m$ allora risulta anche

$$i > r \quad \Rightarrow \quad \forall j \quad u_{ij} = 0$$

Si è pertanto individuata, tra i vettori Ab_i, una famiglia di r vettori indipendenti che genera $\operatorname{im} A$.

Poiché tali vettori appartengono al sottospazio generato dai primi r vettori della nuova base di $\mathcal{V}$, anche questi sono una base di $\operatorname{im} A$. I restanti $(m - r)$ vettori della nuova base di $\mathcal{V}$, essendo ortogonali rispetto ai primi, generano $(\operatorname{im} A)^\perp = \ker A^*$.

Si è dunque costruita la decomposizione

$$\mathcal{V} = \operatorname{im} A \oplus \ker A^*$$

attraverso la costruzione di una base ortonormale di $\operatorname{im} A$, definita, rispetto alla base originaria, dalle prime r colonne di $\mathbf{Q}$, e di una base ortonormale di $\ker A^*$, definita dalle restanti colonne di $\mathbf{Q}$.

Applicando la stessa procedura alla matrice di A^*, che risulta essere $\mathbf{A}^T$ essendo le basi ortonormali, si costruisce la decomposizione

$$\mathcal{U} = \operatorname{im} A^* \oplus \ker A$$