

Numero di operazioni nella eliminazione di Gauss

Il numero di operazioni eseguite può essere valutato semplicemente incrementando il valore di una variabile intera in corrispondenza di ciascuna operazione. Indicando con N_a il numero di addizioni e sottrazioni e con N_m il numero di moltiplicazioni e divisioni, si ottiene il seguente algoritmo di valutazione delle operazioni eseguite sulla matrice \mathbf{A} (escludendo le operazioni relative alla *equilibratura*)

```

Na:=0; Nm:=0;
for j:=1 to n-1 do
begin
  for i:=j+1 to n do
  begin
    Mm:=Nm+1;
    for k:=j+1 to n do
    begin
      Na:=Na+1; Nm:=Nm+1;
    end;
  end;
end;
end;

```

da cui si possono ricavare le seguenti espressioni per N_a e N_m

$$\begin{aligned}
 N_m &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=j+1}^n \left(\sum_{k=j+1}^n 1 \right) + 1 \right) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=j+1}^n (n-j+1) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} ((n-j+1)(n-j)) = \frac{n^3 - n}{3} \\
 N_a &= \sum_{j=1}^{n-1} ((n-j)(n-j)) = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}
 \end{aligned}$$

Per il numero di operazioni eseguite sul vettore \mathbf{b} si ottiene

$$N_m = N_a = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=j+1}^n 1 \right) = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) = \frac{n^2 - n}{2}$$

Il numero di operazioni svolte nella *sostituzione all'indietro* può essere valutato dal seguente algoritmo

```

Na:=0; Nm:=0;
for i:=n downto 1 do
begin
  for k:=i+1 to n do

```

```
begin
  Na:=Na+1; Nm:=Nm+1;
end;
Na:=Na+1; Nm:=Nm+1;
end;
```

da cui si può ricavare la espressione

$$N_a = N_m = \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{k=i+1}^n 1 \right) + 1 \right) = \sum_{i=1}^n (n - i + 1) = \frac{n^2 + n}{2}$$

È bene notare che il numero di operazioni effettivamente svolte risulta in generale inferiore o uguale al numero di operazioni calcolato poichè per particolari valori di \mathbf{A} o di \mathbf{b} alcune operazioni potranno coinvolgere l'elemento neutro (addizioni con zero e moltiplicazioni per uno).