Cambiamenti di base

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale di dimensione n e $\{b_1 \dots b_n\}$ una sua base. Se si considera una diversa base $\{\acute{b}_1 \dots \acute{b}_n\}$ quale relazione esiste tra le componenti di un vettore u nella prima base e le componenti dello stesso vettore nella seconda base?

Indicando con φ e $\acute{\varphi}$ gli isomorfismi $\mathcal{U} \to \Gamma^n$ corrispondenti alle due basi, per un vettore $u \in \mathcal{U}$ risulta

$$\varphi^i(u) = \varphi^i(\acute{\varphi}^j(u)\acute{b}_j) = \varphi^i(\acute{b}_j)\acute{\varphi}^j(u)$$

Riguardando gli scalari $\varphi^i(\acute{b}_j)$, componenti dei vettori della seconda base rispetto alla prima, come elementi di una matrice $\mathbf{S}$ e i vettori $\mathbf{u} := \varphi(u)$, $\acute{\mathbf{u}} := \acute{\varphi}(u)$ come matrici ad una colonna, la relazione precedente si può scrivere

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}\acute{\mathbf{u}}$$

Si noti che, essendo sia φ che $\acute{\varphi}$ isomorfismi, la matrice $\mathbf{S}$ risulta non singolare.

Si consideri ora un altro spazio vettoriale $\mathcal{V}$ di dimesione m e una coppia di basi $\{d_1 \dots d_m\}$, $\{\acute{d}_1 \dots \acute{d}_m\}$. Assegnata una trasformazione lineare

$$A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$$

quale relazione esiste tra le matrici di A nelle diverse basi?

Indicando con ψ e $\acute{\psi}$ gli isomorfismi $\mathcal{V} \to \Gamma^m$ corrispondenti alle due basi di $\mathcal{V}$, per un vettore $u \in \mathcal{U}$ valgono le seguenti relazioni

$$\psi^i(A\acute{b}_j) = \psi^i(A\varphi^k(\acute{b}_j)b_k) = \psi^i(Ab_k)\varphi^k(\acute{b}_j) = a^i{}_k\varphi^k(\acute{b}_j)$$
$$\psi^i(A\acute{b}_j) = \psi^i(\acute{\psi}^k(A\acute{b}_j)\acute{d}_k) = \psi^i(\acute{a}^k{}_j\acute{d}_k) = \psi^i(\acute{d}_k)\acute{a}^k{}_j$$

avendo posto $a^i{}_k := \psi^i(Ab_k)$, $\acute{a}^k{}_j := \acute{\psi}^k(A\acute{b}_j)$. Risulta dunque

$$a^i{}_k\varphi^k(\acute{b}_j) = \psi^i(\acute{d}_k)\acute{a}^k{}_j$$

Indicando con $\mathbf{T}$ la matrice costituita dagli scalari $t^i{}_k := \psi^i(\acute{d}_k)$ e con $\mathbf{A}$ e $\acute{\mathbf{A}}$ le matrici costituite rispettivamente dagli scalari $a^i{}_j$ e $\acute{a}^i{}_j$, la relazione precedente si può scrivere

$$\mathbf{AS} = \mathbf{T}\acute{\mathbf{A}}$$