Dimensione

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale tale che esista una base costituita da un numero finito di vettori. Si può dimostrare che qualsiasi altra base è costituita dallo stesso numero di vettori. Tale numero si chiama *dimensione* dello spazio $\mathcal{U}$ e si indica con $\dim \mathcal{U}$.

Si dimostra che tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori dimostrando che se $\{b_1 \dots b_n\}$ è una base di $\mathcal{U}$ allora qualsiasi famiglia di $n+1$ vettori $\{u_1 \dots u_{n+1}\}$ è costituita da vettori dipendenti.

Infatti si osservi che, essendo $\{b_1 \dots b_n\}$ una base, i vettori u_i possono essere espressi come combinazioni lineari dei vettori b_i

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \beta^1{}_1 b_1 + \beta^2{}_1 b_2 + \ldots + \beta^n{}_1 b_n \\
u_2 &= \beta^1{}_2 b_1 + \beta^2{}_2 b_2 + \ldots + \beta^n{}_2 b_n \\
&\dots \\
u_n &= \beta^1{}_n b_1 + \beta^2{}_n b_2 + \ldots + \beta^n{}_n b_n \\
u_{n+1} &= \beta^1{}_{n+1} b_1 + \beta^2{}_{n+1} b_2 + \ldots + \beta^n{}_{n+1} b_n
\end{aligned}
$$

Si proceda ora nel seguente modo:

- se $u_1 \neq o$ allora almeno un coefficiente della prima combinazione lineare è non nullo; si esprima allora un vettore b_{k_1} come combinazione lineare di u_1 e degli altri $(n-1)$ vettori della base; si sostituisca tale espressione nelle successive;
- se u_2 non risulta dipendente da u_1 allora si esprima un altro vettore b_{k_2} come combinazione lineare di $\{u_1, u_2\}$ e degli altri $(n-2)$ vettori della base; si sostituisca tale espressione nelle successive;
- proseguendo può accadere che un vettore u_i risulti combinazione lineare di $\{u_1 \dots u_{i-1}\}$; altrimenti si esprima, per ciascun vettore u_i, un altro vettore b_{k_i} come combinazione lineare di $\{u_1 \dots u_i\}$ e di altri $(n-i)$ vettori della base, sostituendo tale espressione nelle successive;
- se si arriva sino il vettore u_n, essendo risultati indipendenti i vettori $\{u_1 \dots u_{n-1}\}$, questo o risulta combinazione lineare dei soli vettori $\{u_1 \dots u_{n-1}\}$ oppure risulta combinazione lineare di tali vettori e dell'unico vettore della base b_{k_n} non ancora espresso come combinazione lineare di altri vettori; nel primo caso i vettori $\{u_1 \dots u_n\}$ risultano dipendenti, nel secondo caso si esprima il vettore b_{k_n} come combinazione lineare dei vettori $\{u_1 \dots u_n\}$;
- se i vettori $\{u_1 \dots u_n\}$ sono risultati indipendenti, tutti i vettori della base $\{b_1 \dots b_n\}$ sono stati espressi come combinazione lineare dei vettori u_i; questo implica che il vettore u_{n+1} risulta combinazione lineare dei vettori $\{u_1 \dots u_n\}$.

Pertanto la famiglia di vettori $\{u_1 \dots u_{n+1}\}$ contiene al più n vettori indipendenti.

Allo spazio $\{o\}$ costituito dal solo vettore nullo si attribuisce dimensione 0.

Se non esiste una base costituita da un numero finito di vettori si dice che lo spazio $\mathcal{U}$ ha *dimensione infinita*.

Nel seguito si farà riferimento solo a spazi vettoriali che hanno dimensione finita.

Dalla definizione di *dimensione* derivano alcuni semplici teoremi.

Se U è un sottospazio di $\mathcal{U}$ allora

$$
\begin{aligned}
\dim \mathrm{U} < \dim \mathcal{U} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{U} \subset \mathcal{U} \\
\dim \mathrm{U} = \dim \mathcal{U} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{U} = \mathcal{U}
\end{aligned}
$$

(basta pensare ad una base di U e ad una sua estensione ad una base di $\mathcal{U}$).
Se U_1 e U_2 sono due sottospazi tali che $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 = \{o\}$ allora

$$\dim(\mathrm{U}_1 \oplus \mathrm{U}_2) = \dim \mathrm{U}_1 + \dim \mathrm{U}_2$$

(unendo una base di U_1 ed una base di U_2 si ottiene una base dello spazio somma).