Endomorfismi diagonalizzabili e endomorfismi normali

Si osservi che

a) un endomorfismo A di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ è *diagonalizzabile* se e solo se è esprimibile come combinazione lineare di proiezioni $P_1, \ldots, P_r$ tali che $\sum_{\alpha=1}^{r} P_\alpha = I\,,\ P_\alpha P_\beta = O$ per $\alpha \neq \beta$;

b) un endomorfismo A di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$, dotato di prodotto interno, è *normale* se e solo se è esprimibile come combinazione lineare di proiezioni *ortogonali* $P_1, \ldots, P_r$ tali che $\sum_{\alpha=1}^{r} P_\alpha = I\,,\ P_\alpha P_\beta = O$ per $\alpha \neq \beta$;

In uno spazio dotato di prodotto interno gli endomorfismi normali costituiscono dunque un sottoinsieme degli endomorfismi diagonalizzabili.

Viceversa, in corrispondenza di ciascun endomorfismo diagonalizzabile A, è possibile definire un prodotto interno tale che l'endomorfismo A risulti normale. Infatti è sufficiente che i sottospazi

$$\operatorname{im} P_\alpha = \ker\,(A - \lambda_\alpha I)$$

siano mutuamente ortogonali affinché le proiezioni P_α siano ortogonali. Tale condizione è realizzabile in ogni caso costruendo una base $\{b_1 \ldots b_n\}$, come unione di basi dei sottospazi $\operatorname{im} P_\alpha$, e dotando lo spazio $\mathcal{U}$ del prodotto interno definito dai valori $\langle b_i\,, b_j\rangle = \delta_{ij}$.