Endomorfismi autoaggiunti e endomorfismi emisimmetrici

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno. Un endomorfismo A di $\mathcal{U}$ si dice *autoaggiunto* se

$$A = A^*$$

Per un endomorfismo autoaggiunto si ha

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \langle Au\,,u\rangle = \langle u\,,A^* u\rangle = \langle u\,,Au\rangle$$

Poiché per una proprietà del prodotto interno è

$$\langle Au\,,u\rangle = \overline{\langle u\,,Au\rangle}$$

risulta

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \langle Au\,,u\rangle \in \mathbb{R}$$

L'endomorfismo A si dice *definito positivo* se

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{U} \quad & \langle Au\,,u\rangle \geq 0 \\ & \langle Au\,,u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = o \end{aligned}$$

oppure *semidefinito positivo* se

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{U} \quad & \langle Au\,,u\rangle \geq 0 \\ & \langle Au\,,u\rangle = 0 \quad \not\Rightarrow \quad u = o \end{aligned}$$

La matrice di un endomorfismo autoaggiunto in una base ortonormale risulta tale che

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$$

Una matrice che ha questa proprietà si dice *hermitiana* e può essere espressa come somma di una parte reale simmetrica e di una parte immaginaria emisimmetrica.[1]

Un endomorfismo A di $\mathcal{U}$ si dice *emisimmetrico* se

$$A = -A^*$$

Per un endomorfismo emisimmetrico si ha

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \langle Au\,,u\rangle = \langle u\,,A^* u\rangle = -\langle u\,,Au\rangle$$

Risulta pertanto

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \langle Au\,,u\rangle \in \mathbb{C}$$

La matrice di un endomorfismo emisimmetrico in una base ortonormale risulta tale che

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^H$$

Una matrice che ha questa proprietà può essere espressa come somma di una parte reale emisimmetrica e di una parte immaginaria simmetrica.

[1] Infatti ponendo $\mathbf{A} = \mathbf{A}_R + i\mathbf{A}_I$, con $\mathbf{A}_R := \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \overline{\mathbf{A}})$ e $\mathbf{A}_I := \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}})$, si ha $\mathbf{A}_R^T = \mathbf{A}_R$ e $\mathbf{A}_I^T = -\mathbf{A}_I$.