Endomorfismi nilpotenti

Un endomorfismo N di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ si dice *nilpotente* se esiste un intero positivo q, detto *indice di nilpotenza*, tale che

$$N^q = O$$
$$N^{q-1} \neq O$$

Se N è un endomorfismo nilpotente di indice q e u è un vettore tale che

$$N^{q-1}u \neq o$$

allora i vettori

$$u\,,\ Nu\,,\ N^2u\,,\ \ldots\,,\ N^{q-1}u$$

risultano linearmente indipendenti.

Infatti se fossero linearmente dipendenti esisterebbero q scalari α_i non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=p}^{q-1} \alpha_i N^i u = o$$

avendo indicato con p il più piccolo intero tale che $\alpha_p \neq 0$. Dividendo per $-\alpha_p$ si avrebbe

$$N^p u = \sum_{i=p+1}^{q-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_p} N^i u = N^{p+1} \sum_{i=p+1}^{q-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_p} N^{i-p-1} u = N^{p+1} \mathrm{v}$$

Risulterebbe perciò vera la seguente espressione

$$N^{q-1}u = N^{q-1-p}N^p u = N^{q-1-p}N^{p+1}\mathrm{v} = N^q \mathrm{v} = o$$

che nega la ipotesi che esista un vettore u tale che $N^{q-1}u \neq o$ e quindi che l'indice di nilpotenza sia q.

Dunque se N è un endomorfismo di $\mathcal{U}$ nilpotente di indice q allora ad un vettore u tale che $N^{q-1}u \neq o$ corrisponde un sottospazio V generato dalla famiglia di vettori indipendenti $\{u, Nu, N^2u, \ldots, N^{q-1}u\}$.

Un sottospazio U invariante rispetto ad un endomorfismo A che sia generato da una famiglia di vettori indipendenti $\{u, Au, A^2u, \ldots, A^{r-1}u\}$ si dice *ciclico* rispetto ad A e il vettore u si dice *generatore* di U.

Il sottospazio V è dunque ciclico rispetto a N.

Si noti che $\dim \mathrm{V} = q$ e che la matrice di $N|_{\mathrm{V}}$ nella base $\{u, Nu, N^2u, \ldots, N^{q-1}u\}$ risulta avere la seguente forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$