Norma di un vettore

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale con $\Gamma = \mathbb{R}$ oppure $\Gamma = \mathbb{C}$. Si dice *norma* una funzione

$$\|\cdot\| : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

tale che

1. $\forall u \in \mathcal{U}\,,\ \forall \alpha \in \Gamma \qquad \|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$
2. $\forall u, v \in \mathcal{U} \qquad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
3. $\forall u \in \mathcal{U} \qquad \|u\| \geq 0 \quad , \quad u = o \iff \|u\| = 0$

Nel caso in cui $\mathcal{U}$ sia dotato di prodotto interno una conveniente definizione di norma è la seguente

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \|u\| := \langle u\,, u\rangle^{1/2}$$

È semplice verificare che tale funzione soddisfa le proprietà 1 e 3. Si ha inoltre

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \quad |\langle u\,, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Questa relazione, detta *diseguaglianza di Schwarz*, è banalmente vera quando uno dei due vettori è il vettore nullo; negli altri casi si può derivarla dalla proprietà della norma del vettore $(\langle u\,, u\rangle v - \langle v\,, u\rangle u)$ di essere un numero reale non negativo.
La funzione definita soddisfa anche la proprietà 2. Infatti risulta

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \|u + v\|^2 = \langle u\,, u\rangle + \langle v\,, v\rangle + \langle u\,, v\rangle + \langle v\,, u\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2Re(\langle u\,, v\rangle)$$
$$Re(\langle u\,, v\rangle) \leq |\langle u\,, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

È dunque

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Si osservi che in uno spazio $\mathcal{U}$ dotato di norma l'isomorfismo $\varphi : \mathcal{U} \to \Gamma^n$ indotto da una base induce in Γ^n la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma^n} := \|\varphi^{-1}(\mathbf{u})\|_{\mathcal{U}}$$

e, viceversa, una norma in Γ^n induce in $\mathcal{U}$ la norma

$$\|u\|_{\mathcal{U}} := \|\varphi(u)\|_{\Gamma^n}$$

Negli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ è utile di solito assegnare una norma definita nel seguente modo

$$\|\mathbf{u}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |u^i|^p\right)^{1/p}$$

dove p è un intero positivo. Risulta in particolare

$$\|\mathbf{u}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |u^i|$$

$$\|\mathbf{u}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |u^i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|\mathbf{u}\|_\infty := \max_i |u^i|$$

Nel caso in cui lo spazio vettoriale $\mathcal{U}$ è definito su $\mathbb{R}$, la diseguaglianza di Schwarz implica

$$\forall u, v \in \mathcal{U} \qquad -1 \leq \frac{\langle u\,, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

Questa proprietà permette di definire l'*angolo* tra i vettori u e v come il numero reale $0 \leq \theta \leq \pi$, tale che

$$\cos\theta = \frac{\langle u\,, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$