Proiezioni ortogonali

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno. Una proiezione P di $\mathcal{U}$ si dice *ortogonale* se

$$\ker P = (\operatorname{im} P)^{\perp}$$

Un interessante teorema è il seguente.

Se P_1 e P_2 sono due proiezioni ortogonali allora

$$\operatorname{im} P_1 \perp \operatorname{im} P_2 \iff P_2 P_1 = O \iff P_1 P_2 = O$$

Infatti

$$\operatorname{im} P_1 \perp \operatorname{im} P_2 \iff \operatorname{im} P_1 \subset (\operatorname{im} P_2)^{\perp} = \ker P_2 \iff P_2 P_1 = O$$

e anche

$$\operatorname{im} P_1 \perp \operatorname{im} P_2 \iff \operatorname{im} P_2 \subset (\operatorname{im} P_1)^{\perp} = \ker P_1 \iff P_1 P_2 = O$$

Una importante proprietà delle proiezioni ortogonali è che esse sono endomorfismi autoaggiunti. Infatti, poiché $\operatorname{im}(I-P) = \ker P = (\operatorname{im} P)^{\perp}$, risulta

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \mathcal{U} \quad \{ & \langle Pu\,, v\rangle = \langle Pu\,, Pv + (I-P)v\rangle = \langle Pu\,, Pv\rangle\,, \\ & \langle u\,, Pv\rangle = \langle Pu + (I-P)u\,, Pv\rangle = \langle Pu\,, Pv\rangle \} \quad \Rightarrow \quad \langle Pu\,, v\rangle = \langle u\,, Pv\rangle \end{aligned}$$

Viceversa, una proiezione che sia anche un endomorfismo autoaggiunto è una proiezione ortogonale, essendo per un generico endomorfismo $(\operatorname{im} A^*)^{\perp} = \ker A$.

Si consideri ora il sottospazio W generato da un vettore $w \in \mathcal{U}$. Se P è la corrispondente proiezione ortogonale si ha

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad Pu \in \mathrm{W}, \quad (u - Pu) \in \mathrm{W}^{\perp}$$

È interessante esaminare la matrice di P in una base ortonormale $\{b_1 \dots b_n\}$.

Per ciascun vettore b_i si ha

$$\begin{aligned} & Pb_i \in \mathrm{W} \quad \Rightarrow \quad Pb_i = \alpha_i w \\ & (b_i - Pb_i) \in \mathrm{W}^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \langle b_i - \alpha_i w\,, w\rangle = \langle b_i\,, w\rangle - \alpha_i \langle w\,, w\rangle = 0 \\ & \langle b_i\,, b_j\rangle = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \langle b_i\,, w\rangle = \overline{w}^i \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \overline{w}^i / \langle w\,, w\rangle \end{aligned}$$

La colonna *i–esima* della matrice di P è dunque costituita dalle componenti del vettore w moltiplicate per lo scalare α_i. Indicando con $\mathbf{w}$ il vettore delle componenti di w, la matrice di P risulta dunque

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\eta} \mathbf{w} \mathbf{w}^H$$

avendo posto $\eta := \langle w\,, w\rangle = \mathbf{w}^H \mathbf{w}$.