Proiezioni

Un endomorfismo P di uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ si dice *proiezione* se

$$PP = P$$

Ad una proiezione P corrisponde la decomposizione di $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \mathrm{im}\, P \oplus \ker P$$

Infatti

$$\{\forall u \in \mathcal{U} \quad u = Pu + (I - P)u\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} = \mathrm{im}\, P + \mathrm{im}\,(I - P)$$

e

$$\mathrm{im}\, P \cap \mathrm{im}\,(I - P) = \{o\}$$

poiché

$$u \in \mathrm{im}\, P \cap \mathrm{im}\,(I - P) \Rightarrow \exists v, w \mid u = Pv = (I - P)w,$$
$$Pv = PPv = P(I - P)w = (P - PP)w = o \quad \Rightarrow \quad u = o$$

Inoltre

$$\mathrm{im}\,(I - P) = \ker P$$

poiché

$$\{\forall u \in \mathrm{im}\,(I - P) \quad \exists v \mid u = (I - P)v\ ,\ Pu = P(I - P)v = o\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{im}\,(I - P) \subset \ker P$$
$$\{\forall u \in \ker P \quad u = Pu + (I - P)u = (I - P)u\} \quad \Rightarrow \quad \ker P \subset \mathrm{im}\,(I - P)$$

In corrispondenza di una qualsiasi decomposizione di $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \mathrm{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{U}_r$$

le proiezioni $P_1, \ldots, P_r$ tali che

$$\forall \alpha \quad \mathrm{U}_\alpha = \mathrm{im}\, P_\alpha \quad , \quad \forall \beta \neq \alpha \quad \mathrm{U}_\beta \subset \ker P_\alpha$$

si dicono *proiezioni canoniche*. Esse sono uniche, poiché per ogni vettore $u \in \mathcal{U}$ la decomposizione

$$u = u_1 + \ldots + u_r \qquad u_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha$$

è unica. Inoltre è semplice verificare che esse hanno le seguenti proprietà

$$\sum_{\alpha=1}^{r} P_\alpha = I$$
$$\alpha \neq \beta \ \Rightarrow\ P_\alpha P_\beta = O$$

Viceversa se $P_1, \ldots, P_r$ sono proiezioni che hanno tali proprietà allora

$$\mathrm{im}\, P_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{im}\, P_r = \mathcal{U}$$
$$\alpha \neq \beta \ \Rightarrow\ \mathrm{im}\, P_\beta \subset \ker P_\alpha$$

Infatti

$$\sum_{\alpha=1}^{r} P_\alpha = I \quad \Rightarrow \quad \mathrm{im}\, P_1 + \ldots + \mathrm{im}\, P_r = \mathcal{U}$$
$$\{\alpha \neq \beta \quad \Rightarrow \quad P_\alpha P_\beta = O\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{im}\, P_\beta \subset \ker P_\alpha$$

e quindi

$$\mathrm{im}\, P_\alpha \cap \ker P_\alpha = \{o\} \quad \Rightarrow \quad \{\alpha \neq \beta \ \Rightarrow\ \mathrm{im}\, P_\alpha \cap \mathrm{im}\, P_\beta = \{o\}\}$$