Endomorfismi normali in uno spazio vettoriale definito su $\mathbb{R}$

Sia $\mathcal{U}$ uno spazio vettoriale definito sul campo dei numeri reali e dotato di prodotto interno. Sia A un endomorfismo normale di $\mathcal{U}$. Esiste dunque la decomposizione ortogonale

$$\mathcal{U} = \operatorname{im} A \oplus \ker A$$

Inoltre, poiché

$$\begin{gathered} A(A^*)^k = AA^*(A^*)^{k-1} = A^*A(A^*)^{k-1} = (A^*)^k A \\ f(A^*) = f(A)^* \end{gathered}$$

in corrispondenza di qualsiasi polinomio f si ha

$$\begin{gathered} f(A)f(A^*) = f(A^*)f(A) \\ f(A)f(A)^* = f(A)^*f(A) \end{gathered}$$

Dunque l'endomorfismo $f(A)$ è anch'esso normale.
Il polinomio minimo di A sia

$$p = f_1^{k_1} \dots f_r^{k_r}$$

Per ciascun fattore f_α si ha, per la normalità di $f_\alpha(A)$,

$$\mathcal{U} = \operatorname{im} f_\alpha(A) \oplus \ker f_\alpha(A)$$

Poiché nessun vettore di $\operatorname{im} f_\alpha(A)$ diverso dal vettore nullo appartiene a $\ker f_\alpha(A)$, risulta

$$\ker f_\alpha^2(A) = \ker f_\alpha(A)$$

Indicando con P_α la proiezione canonica sull'autospazio V_α, riferita alla decomposizione di $\mathcal{U}$ nella somma diretta degli autospazi generalizzati, l'endomorfismo

$$f_\alpha(A)P_\alpha$$

ha pertanto indice di nilpotenza 1. È dunque $k_\alpha = 1$ e l'endomorfismo A risulta essere semisemplice.
Si osservi inoltre che, riferendosi alla decomposizione

$$\mathcal{U} = \ker f_1(A) \oplus \dots \oplus \ker f_r(A)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} f_1(A) &= f_1(A)(P_1 + \dots + P_r) = f_1(A)P_1 + f_1(A)P_2 + \dots + f_1(A)P_r \\ &= f_1(A)P_2 + \dots + f_1(A)P_r = f_1(A)(P_2 + \dots + P_r) \end{aligned}$$

e quindi, per la invarianza degli autospazi generalizzati,

$$\operatorname{im} f_1(A) \subset (\ker f_2(A) \oplus \dots \oplus \ker f_r(A))$$

Essendo anche

$$\mathcal{U} = \ker f_1(A) \oplus \operatorname{im} f_1(A)$$
$$\operatorname{im} f_1(A) = (\ker f_1(A))^{\perp}$$

risulta infine

$$\operatorname{im} f_1(A) = (\ker f_2(A) \oplus \ldots \oplus \ker f_r(A)) = (\ker f_1(A))^{\perp}$$

Poiché si ottiene una analoga relazione per ciascuno dei sottospazi $\ker f_\alpha(A)$, si può concludere che gli autospazi generalizzati di un endomorfismo normale sono mutuamente ortogonali.

Si consideri il caso in cui A sia un endomorfismo autoaggiunto.

Essendo A un particolare endomorfismo normale esso è semisemplice. Esiste dunque una decomposizione di $\mathcal{U}$ nella somma diretta di sottospazi invarianti di dimensione 1 o 2. Si dimostra che se A è autoaggiunto ogni autospazio generalizzato V_α è decomponibile nella somma diretta di sottospazi invarianti di dimensione 1. Infatti se W è un sottospazio invariante di V_α, allora il polinomio minimo di $A|_{\mathrm{W}}$ è f_α. In una base ortonormale di W la matrice di $A|_{\mathrm{W}}$ risulta simmetrica. Se la dimensione di W è 2 tale matrice sia

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

Il corrispondente polinomio caratteristico

$$P_{\mathrm{W}}(\lambda) = \lambda^2 - (x+z)\lambda - y^2 + xz$$

è riducibile su $\mathbb{R}$, per qualunque valore di x, y, z, nel prodotto di due polinomi. Non potendo P_{W} avere fattori primi diversi da f_α, deve essere

$$P_{\mathrm{W}} = f_\alpha^2$$

Questo implica che f_α è un polinomio di grado 1. Pertanto i sottospazi di V_α irriducibili hanno dimensione 1.

Si consideri ora un endomorfismo ortogonale R e una corrispondente decomposizione di $\mathcal{U}$ in sottospazi irriducibili. Essendo R un particolare endomorfismo normale, tali sottospazi hanno dimensione 1 oppure 2.

Sia U uno dei sottospazi di dimensione 1. Ad esso corrisponde un polinomio minimo $p(t) = t - \lambda$, con $|\lambda| = 1$. Infatti per $u \in \mathrm{U}$ risulta

$$\langle Ru\,, Ru\rangle = \langle u\,, u\rangle = \langle \lambda u\,, \lambda u\rangle = \lambda^2 \langle u\,, u\rangle \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1$$

Sia V uno dei sottospazi irriducibili di dimensione 2. Il polinomio minimo di $R|_{\mathrm{V}}$ è un polinomio irriducibile di grado 2 rappresentabile come

$$p(t) = t^2 - 2at + b^2 \qquad b^2 > a^2$$

In una base costituita da un qualsiasi vettore u e dal vettore Ru la matrice di $R|_{\mathrm{V}}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & -b^2 \\ 1 & 2a \end{pmatrix}$$

Si noti che

$$\det R|_{\mathrm{V}} = b^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \det R|_{\mathrm{V}} = 1$$

La restrizione di R ad un sottospazio irriducibile V di dimensione 2 è dunque necessariamente una rotazione. Inoltre poiché

$$b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 < 1$$

è possibile rappresentare a come uno dei valori che la funzione $\cos$ assume nell'intervallo aperto $]0, \pi[$

$$a = \cos\theta$$

Si noti che

$$\langle u\,, Ru\rangle = \langle Ru\,, R^2 u\rangle = \langle Ru\,, (-b^2 I + 2aR)u\rangle \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\langle u\,, Ru\rangle}{\langle u\,, u\rangle}$$

Si consideri ora la base ortonormale costituita dal vettore u e dal vettore[1]

$$v := \frac{1}{\sin\theta}(Ru - \cos\theta\, u)$$

In tale base la matrice di $R|_{\mathrm{V}}$ risulta, utilizzando la proprietà $p(R|_{\mathrm{V}}) = O$,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Con riferimento alla decomposizione di $\mathcal{U}$ in sottospazi irriducibili, si indichi con W la somma dei sottospazi irriducibili di dimensione 1 corrispondenti a $\lambda = -1$. Il determinante di R risulta $+1$ o -1 a seconda che la dimensione di W sia pari o dispari.

Se R è anche un endomorfismo autoaggiunto, allora i sottospazi irriducibli hanno tutti dimensione 1. Indicando con W l'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda = -1$, il suo complemento ortogonale risulta essere l'autospazio corrispondente all'autovalore $\lambda = 1$. Indicando con P la proiezione ortogonale su W, la proiezione su $\mathrm{W}^\perp$ è $(I - P)$. Pertanto la decomposizione spettrale di R risulta

$$R = -P + (I - P)$$

da cui deriva

$$R = I - 2P$$

Anche in questo caso il determinante di R risulta $+1$ o -1 a seconda che la dimensione di W sia pari o dispari. In particolare R è una riflessione se la dimensione di W è dispari.

[1] Si noti che è possibile scegliere anche il vettore $\acute{v} = -v$, ottenendo in tal caso una diversa matrice di $R|_{\mathrm{V}}$.